

本邦居住地域内に限定した地心直交座標から経緯度・楕円体高への効率的な換算式 An Efficient Approximation Formula for Converting Geocentric Cartesian Coordinates to Geodetic Latitude/Longitude and Ellipsoidal Height Restricted to Residency within Japan

院長 河瀬和重
Director-General KAWASE Kazushige

要 旨

地心直交座標から経緯度・楕円体高への換算について、繰返し計算を必要とせず、かつ、三角関数をほとんど用いることのない計算方法を提案する。得られた計算方法は、元々実用上十分な精度を保有しているとされているものについて、念のため更に近似を進めているものであるが、それにもかかわらず、現行の我が国において主流に用いられている計算方法よりも計算コストは確実に縮減されている。

1. はじめに

地心直交座標から経緯度・楕円体高への換算（以下「 $XYZ \Rightarrow \varphi\lambda h$ 換算」といい、逆の換算を「 $\varphi\lambda h \Rightarrow XYZ$ 換算」と、両者相互の換算を「 $\varphi\lambda h \Leftrightarrow XYZ$ 換算」という。）は、測位衛星から得られる座標から測量法（昭和 24 年法律第 188 号）第 11 条第 1 項第一号に規定する、地理学的経緯度及び平均海面からの高さに直結する座標へと換算するものであり、衛星測位が主流となっている昨今においてはなくてはならないものとなっている。

$\varphi\lambda h \Rightarrow XYZ$ 換算は比較的簡単に計算式が導出できるのに対し、 $XYZ \Rightarrow \varphi\lambda h$ 換算はそうたやすいものではなく、これまでに様々な研究者により計算方法が提案されている。そうした計算方法では、地球の内部外部問わず、宇宙空間のどのような地点においても安定的に解が得られるように様々な工夫が凝らされているが、その分複雑であることは否めない。

現行の我が国における公共測量で標準的に用いられる作業規程の準則においては、三角関数を多用した繰返し計算による計算式が提示されているが、決して効率的な計算方法とは言えないのが実情である。

本稿では、 $XYZ \Rightarrow \varphi\lambda h$ 換算について、繰返し計算を必要とせず、かつ、三角関数をほとんど用いることのない計算方法を提案する。なお、提案する計算方法は本邦居住地域内に限られ、様々な研究者がカバーする、地球の極付近における座標換算であるとか、測位衛星自体の楕円体高や地球内核近傍の（絶対値が著しく大きい負値の）楕円体高を求めるといった想定は全くしていないので御了知されたい。

2. 諸量の定義

議論の前提として、諸量の定義と併せて、本稿で

提案する計算方法により得られた計算式についても図-1 にまとめておく。また、3. で用いる事実として

$$\begin{aligned} N \cos \varphi &= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - \tilde{f}) \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi + \tilde{f} \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{1 + \tilde{f} \tan^2 \varphi}} \end{aligned}$$

について言及しておく。

経緯度・高さとの地心直交座標の相互換算

φ	: 緯度	λ	: 経度
h	: 楕円体高	N	: 卯酉線曲率半径
N_g	: ジオイド高	H	: 標高 ($= h - N_g$)
a, f	: 地球楕円体の長半径及び扁平率、 $\tilde{f} = (1 - f)^2$		
X, Y, Z	: 地心直交座標系における座標値		

とする。

緯度、経度及び楕円体高から地心直交座標への換算

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - (1 - \tilde{f}) \sin^2 \varphi}}, \quad Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (\tilde{f} N + h) \sin \varphi \end{aligned}$$

地心直交座標から緯度、経度及び楕円体高への換算

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad Z_P = Z/P, \quad Q = \tilde{f} + Z_P^2, \quad \tilde{a} = \frac{a(1 - \tilde{f})}{P\sqrt{\tilde{f}Q}}, \\ Q_f &= Q - \tilde{a}\tilde{f}^2, \quad Q_Z = Q + \tilde{a}Z_P^2, \quad k = 3Z_P^2\{Q_Z - (1 + \tilde{a})Q_f\}, \\ t &= \frac{Z_P(Q_f Q_Z + k)}{Q_f^2 + \tilde{f}k}, \\ \varphi &= \tan^{-1} t, \quad \lambda = \tan^{-1} \frac{Y}{X}, \quad h = \sqrt{1 + t^2} \left(P - \frac{a}{\sqrt{1 + \tilde{f}t^2}} \right) \end{aligned}$$

図-1 本稿で議論する $\varphi\lambda h \Leftrightarrow XYZ$ 換算において使用する変数の定義及び提案する計算方法による計算式。

3. 提案する計算方法

図-1 に示す諸量の定義の下で, $XYZ \Rightarrow \varphi\lambda h$ 換算の中で経度 λ は X 座標及び Y 座標から容易に導出できる (あらゆる座標値について数値的安定性を担保するという観点からは更に工夫が必要である.). 緯度 φ 及び楕円体高 h については, 求められた経度 λ の子午線面で地球楕円体を切った断面上の問題に帰着される.

その状況を模式的に示したのが図-2 である. 座標軸の横軸は $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$ を表している.

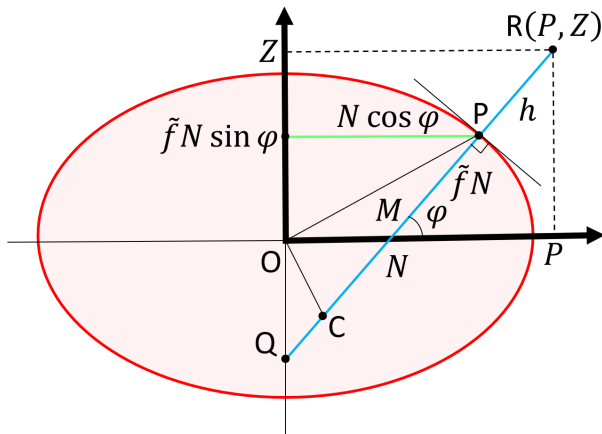


図-2 図-1 で示した諸量を前提に, 当該地点から地球楕円体へ下した垂線の足を通る子午線で地球楕円体を切った断面の模式図. C は P における子午線の曲率中心に相当し, M を子午線曲率半径とする.

図-2 から見て取れるように, $\overrightarrow{OP}$ の成分表示につ

いては座標値の示すとおり, また $\overrightarrow{CP}$ の成分表示については座標軸の横軸と角度 φ を成す単位ベクトルに大きさ M を掛けることにより得られる. すなわち,

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} N \cos \varphi \\ fN \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP} = M \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

であるから, $M = \tilde{f}N^3/a^2$ であることに留意して, 点 P における子午線の曲率中心 C の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} (N - M) \cos \varphi \\ (\tilde{f}N - M) \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - \tilde{f}}{a^2} \begin{pmatrix} N^3 \cos^3 \varphi \\ -\tilde{f}N^3 \sin^3 \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる. ここで $\overrightarrow{CR}$ の傾き (縦横成分比) が $\tan \varphi$

に相当するから, $\hat{a} = a(1 - \tilde{f})$ として,

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{Z + \frac{1 - \tilde{f}}{a^2} \tilde{f}N^3 \sin^3 \varphi}{P - \frac{1 - \tilde{f}}{a^2} N^3 \cos^3 \varphi} \\ &= \frac{\frac{Za^3}{N^3 \cos^3 \varphi} + a\tilde{f}(1 - \tilde{f}) \tan^3 \varphi}{\frac{Pa^3}{N^3 \cos^3 \varphi} - a(1 - \tilde{f})} \\ &= \frac{Z(1 + \tilde{f} \tan^2 \varphi)^{3/2} + \hat{a}\tilde{f} \tan^3 \varphi}{P(1 + \tilde{f} \tan^2 \varphi)^{3/2} - \hat{a}} \end{aligned}$$

が得られる. $N \cos \varphi$ の変形については 2. で言及した事実を用いた. 上式の結果は緯度 φ の正接のみで表されており, それを受け $\tan \varphi = t$ で置換し直せば

$$t = \frac{Z(1 + \tilde{f}t^2)^{3/2} + \hat{a}\tilde{f}t^3}{P(1 + \tilde{f}t^2)^{3/2} - \hat{a}} = F(t) \quad (1)$$

という, t に関する非線形方程式を得る. 子午線の曲率中心を用いるといった上記のアイデアは既に Bowring (1976) により提案されているところであるが, Bowring の式では測地緯度ではなく更成緯度が用いられている上に三角関数が多用されているのに対し, 本稿では測地緯度ベースで三角関数を全く用いていないことに特徴がある.

また Bowring (1976) では, 上式の右辺に t の初期値 t_0 として $t_0 = Z/(\tilde{f}P) = Z_P/\tilde{f}$ ($h = 0$ のケースに相当) を代入し, その値をもって測地緯度の正接を得ることで, 地球楕円体表面近傍では実用的には十分な精度が得られることが示されているが, 本稿では念のためにもう一段近似を進めて, 万全を期すこととする. すなわち, (1) 式において方程式 $G(t) = F(t) - t = 0$ を満たす t を Newton-Raphson 法の第 1 段階により求めるべく,

$$t = t_0 - \frac{G(t_0)}{G'(t_0)} = \frac{F(t_0) - t_0 F'(t_0)}{1 - F'(t_0)} \quad (2)$$

を計算する. まず $F'(t)$ については (LLM でもそれなりの結果は返してくれるがまだまだ人手による整理が必要で) $S(t) = \sqrt{1 + \tilde{f}t^2}$ として

$$F'(t) = \frac{3\tilde{f}t\{(ZS + \hat{a}t)(PS^3 - \hat{a}) - PS(ZS^3 + \hat{a}\tilde{f}t^3)\}}{(PS^3 - \hat{a})^2}$$

と計算され、(2) 式は次式のように変形できる。変形の過程において、変数に付されている添え字は当該

変数を当該添え字で除していることを表すものと約束する。

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{(PS^3 - \hat{a})(ZS^3 + \hat{a}\tilde{f}t^3) - 3\tilde{f}t^2\{(ZS + \hat{a}t)(PS^3 - \hat{a}) - PS(ZS^3 + \hat{a}\tilde{f}t^3)\}}{(PS^3 - \hat{a})^2 - 3\tilde{f}t\{(ZS + \hat{a}t)(PS^3 - \hat{a}) - PS(ZS^3 + \hat{a}\tilde{f}t^3)\}} \Big|_{t=t_0} \\
 &= \frac{(S^2 - \hat{a}_{PS})(Z_P S^2 + \hat{a}_{PS}\tilde{f}t^3) - 3\tilde{f}t^2\{(Z_P + \hat{a}_{PS}t)(S^2 - \hat{a}_{PS}) - (Z_P S^2 + \hat{a}_{PS}\tilde{f}t^3)\}}{(S^2 - \hat{a}_{PS})^2 - 3\tilde{f}t\{(Z_P + \hat{a}_{PS}t)(S^2 - \hat{a}_{PS}) - (Z_P S^2 + \hat{a}_{PS}\tilde{f}t^3)\}} \Big|_{t=t_0} \\
 &= \frac{(Q/\tilde{f} - \hat{a}_{PS})(Z_P Q/\tilde{f} + \hat{a}_{PS}Z_P^3/\tilde{f}^2) - 3(Z_P^2/\tilde{f})\{(Z_P + \hat{a}_{PS}Z_P/\tilde{f})(Q/\tilde{f} - \hat{a}_{PS}) - (Z_P Q/\tilde{f} + \hat{a}_{PS}Z_P^3/\tilde{f}^2)\}}{(Q/\tilde{f} - \hat{a}_{PS})^2 - 3Z_P\{(Z_P + \hat{a}_{PS}Z_P/\tilde{f})(Q/\tilde{f} - \hat{a}_{PS}) - (Z_P Q/\tilde{f} + \hat{a}_{PS}Z_P^3/\tilde{f}^2)\}} \\
 &= Z_P \frac{(Q - \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}\tilde{f})(Q + \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}Z_P^2/\tilde{f}) - 3Z_P^2\{(1 + \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}/\tilde{f})(Q - \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}\tilde{f}) - (Q + \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}Z_P^2/\tilde{f})\}}{(Q - \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}\tilde{f})^2 - 3\tilde{f}Z_P^2\{(1 + \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}/\tilde{f})(Q - \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}\tilde{f}) - (Q + \hat{a}_{P\sqrt{Q/\tilde{f}}}Z_P^2/\tilde{f})\}} \\
 &= Z_P \frac{(Q - \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}\tilde{f}^2)(Q + \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}Z_P^2) - 3Z_P^2\{(1 + \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}})(Q - \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}\tilde{f}^2) - (Q + \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}Z_P^2)\}}{(Q - \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}\tilde{f}^2)^2 - 3\tilde{f}Z_P^2\{(1 + \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}})(Q - \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}\tilde{f}^2) - (Q + \hat{a}_{P\sqrt{\tilde{f}Q}}Z_P^2)\}} \\
 &= Z_P \frac{(Q - \tilde{a}\tilde{f}^2)(Q + \tilde{a}Z_P^2) - 3Z_P^2\{(1 + \tilde{a})(Q - \tilde{a}\tilde{f}^2) - (Q + \tilde{a}Z_P^2)\}}{(Q - \tilde{a}\tilde{f}^2)^2 - 3\tilde{f}Z_P^2\{(1 + \tilde{a})(Q - \tilde{a}\tilde{f}^2) - (Q + \tilde{a}Z_P^2)\}}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

分母分子を $P^2 S^2$ で除する

$Q = \tilde{f}\{S(t_0)\}^2$ を代入

分子の Z_P を括り出すとともに
分母分子に $\tilde{f}^2$ を乗ずる

上式の変形過程においては、

$$Z_P = \frac{Z}{P}, \quad Q = \tilde{f}\{S(t_0)\}^2 = \tilde{f} + Z_P^2, \quad \tilde{a} = \frac{\hat{a}}{P\sqrt{\tilde{f}Q}}$$

なる中間変数を導入している。更に

$$Q_f = Q - \tilde{a}\tilde{f}^2, \quad Q_Z = Q + \tilde{a}Z_P^2, \\ k = 3Z_P^2\{Q_Z - (1 + \tilde{a})Q_f\}$$

とおけば、最終的に (3) 式は次式のようにまとめられる：

$$t = \frac{Z_P(Q_f Q_Z + k)}{Q_f^2 + \tilde{f}k}.$$

以上見てきたとおり、初期値の段階から三角関数は一切使っておらず、 t から最終的に緯度 φ を求めるために逆正接関数を 1 回使うのみである。また

楕円体高 h の導出においても t を使い回すことにより三角関数は一掃された。さらに、平方根も P 及び $\tilde{a}$ を定義するため並びに h を導出するための数回のみであり、加減乗除算の中で計算コストが大きいとされる除算もやはり数回しか用いていない。

ちなみに Bowring が提案した式に相当する (1) 式の結果は $t = Z_P Q_Z / Q_f$ と表すことができ、これに続いて唯一の中間変数 k を導入し、少し追加計算をするだけで 2 次収束の 1 ループ分を稼ぐことができるのは大変効率的であることが見て取れる。

4. まとめ

本邦居住地域内に使用範囲を限定したものではあるが、従来の $XYZ \Rightarrow \varphi\lambda h$ 換算に係る計算式よりも効率的でいて、比較的シンプルな計算式を提示することができた。将来的には本邦内において適用される測量法に基づく、我が国の作業規程の準則に採用されることを期待したい。

(公開日：令和 8 年 6 月 17 日)

参考文献

Bowring, B. R. (1976): Transformation from Spatial to Geographical Coordinates, Survey Review, 23(181), 323–327.
doi:10.1179/sre.1976.23.181.323