Gauss-Krüger 投影における経緯度座標及び平面直角座標相互間の座標換算についてのより簡明な計算方法

A More Concise Method of Calculation for the Coordinate Conversion between Geographic and Plane Rectangular Coordinates on the Gauss-Krüger Projection

企画部　河瀬和重
Planning Department　Kazushige KAWASE

要　　旨

現行の公共測量に係る「作業規程の準則」においては，地球楕円体上の経緯度座標及び平面直角座標系におけるX，Y座標の相互間の座標換算にあたっての計算式が提示されているが，非常に複雑かつ規則性の無い展開式であり，使用する変数の種類も膨大なものとなっている．一方で，当該座標系の投影に用いられている Gauss-Krüger 投影法の根拠となっている，1912 年に発表された Johannes Heinrich Louis Krüger の原論文には，若干コンパクトにまとまった座標換算式が提示されている．

この式はコンパクトではあるものの，現行の計算式に比べ導出過程の理解がやや困難であるため，本論では，最近発表された関係論文の紹介及び筆者自身の勉強も兼ねて，Krüger の原論文に掲載された内容の解説を試み，併せて数式処理ソフトウェアを用いて導出過程の再確認を行うとともに，Web ブラウザ上で当該計算方法を用いた座標換算の確認計算を可能とする，極く簡単なプログラムのソースコードも例示することとする．

1．はじめに

現行の我が国における公共測量に係る作業規程の準則（平成 20 年国土交通省告示第 413 号）の計算式集（国土地理院編，2011）においては，地球楕円体上の経緯度座標及び平面直角座標系（平成 14 年国土交通省告示第 9 号）における X，Y 座標の相互間の座標換算式について，より高次の展開項の追加とともに若干の項の整理整頓が施されているものの，Carl Friedrich Gauss が 19 世紀初め頃に導出したとされる[1]計算式（Krüger 編，1903）を基本的に提示している．この式は，国土地理院の Web サイトにも掲載されている（国土地理院，2002）．しかしながら，この平面直角座標系の地図投影法として採用されている Gauss-Krüger 投影法の根拠となっている，Potsdam のプロイセン測地研究所（Königlich Preussische Geodätische Institut）の報告として 1912 年に発表された Johannes Heinrich Louis Krüger の原論文「地球楕円体の平面への等角投影」（Krüger，1912）には，これとは全く異なる計算式が提示されている．

現行の式は，投影する経度方向の範囲が十分狭い領域であるとして，諸量を中央子午線からの経度差に関する冪級数展開により表したものとなっており，導出の根拠そのものは明確なものではある．しかしながら，実際の計算が非常に煩雑であり，一から導出を誤りなく再現することは相当な困難を伴うばかりか，導出された式については何らかの規則性を見出すこともできないため，計算機の支援も得られにくい．のみならず，当該式は中央子午線からの経度差が大きくなる地点においては近似が破綻してしまう．また，現行の式では，微小量であるとして無視できるとされる項が級数展開の冪項の次数とは独立に除かれており，計算式全体の精度評価をする際に非常に困難を伴うものとなっている．

これに対し Krüger（1912）に掲げられている計算式は，投影としては任意の地点での座標換算が原理的に可能でありながら，式の表現としては非常に簡潔であり，計算機で計算するに当たっても非常に都合がよいものである．このこと自体は，既に我が国においても政春（2008）により示唆されていたことであるが，Krüger（1912）を直接参照しつつその導出過程の全貌をフォローするのは容易なことではない．

一方，最近になって Karney（2011）により数式処理ソフトウェアを用いた当該座標換算式の導出が発表されたが，その導出を完全に再現するには依然として不明確な部分がある．いずれにしても，現時点では当該座標換算式の一部始終について日本語で解説した書物の存在は確認できないのが現状となっている．

本論では，Krüger（1912）に掲げられた座標換算式について，我が国における今後の測量作業への利活用に資することを眼目として，その導出を既出の文献からの若干の改善も含めつつ，一から余すところなく解説することを試みた．以下において，初歩的な複素関数論及び双曲線関数をはじめとした初等関数の取扱いについては既知のものとして議論を進める．

[1] この辺りの経緯についての詳細は，政春（2000）を参照のこと．

２．Krüger による座標換算式の提示

２．１　準備としてのパラメータ等諸量の定義

まず我々は，地球楕円体の楕円体パラメータとして，長半径a，第三扁平率nを採用することとする．nは地球楕円体の扁平率の逆数（逆扁平率）をFとして，$n=1/(2F-1)$で定義される量である．また，通常緯度については測地緯度（geodetic latitude）で議論されることが多いが，ここでは測地緯度に加え，等長緯度（isometric latitude）及び正角緯度（conformal latitude）と呼ばれる量を導入する．等長緯度及び正角緯度が意味するところの詳細については，例えば野村（1983）を参照されたい．

測地緯度φと等長緯度q及び正角緯度χとの関係は，次式のようになる．

$$\chi=\mathrm{gd}\,q=\mathrm{gd}\left(\mathrm{gd}^{-1}\varphi-\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\varphi\right)\right) \tag{1}$$

ここで，$\mathrm{gd}\,x=\sin^{-1}\tanh x=\sec^{-1}\cosh x=\tan^{-1}\sinh x$は Gudermann 関数と呼ばれるもので，$\mathrm{gd}^{-1}x$はその逆関数を表す．なお，$\mathrm{gd}^{-1}x$は，$\mathrm{gd}^{-1}x=\tanh^{-1}\sin x=\cosh^{-1}\sec x=\sinh^{-1}\tan x$のように三角関数及び逆双曲線関数の組合せにて表されるが，これらを用いる代わりに，

$$\mathrm{gd}^{-1}x=\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \tag{2}$$

のように，正接関数と対数関数の組合せでも表すことができる．Gudermann 関数についての日本語による解説としては，例えば坂元（1934）を参照されたい．

また，赤道から極まで及び測地緯度φ_0に至る子午線弧長を表す量として，それぞれS_p及びS_{φ_0}を定義する．具体的には，任意の赤道から測地緯度φまでの子午線弧長を$S(\varphi)$とするとき，河瀬（2009）において報告されているように，

$$S(\varphi)=\frac{a}{1+n}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{3n}{2k}-n\right)\right\}^2\left[\varphi+\sum_{l=1}^{2j}\left(\frac{1}{l}-4l\right)\sin 2l\varphi\prod_{m=1}^{l}\left\{\frac{3n}{2j+2\cdot(-1)^m\lfloor m/2\rfloor}-n\right\}^{(-1)^m}\right] \tag{3}$$

と一般的に表すことができ，$S_p=S(\pi/2)$及び$S_{\varphi_0}=S(\varphi_0)$に相当する．後の計算で使用するために，上式を規格化した式として，

$$\frac{\pi S(\varphi)}{2S_p}=\varphi+\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{3n}{2k}-n\right)\right\}^2\sum_{l=1}^{2j}\left(\frac{1}{l}-4l\right)\sin 2l\varphi\prod_{m=1}^{l}\left\{\frac{3n}{2j+2\cdot(-1)^m\lfloor m/2\rfloor}-n\right\}^{(-1)^m}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{3n}{2k}-n\right)\right\}^2}=\varphi+s(\varphi) \tag{4}$$

で表される$s(\varphi)$についても定義しておく．

さらに，投影時の中央子午線上における縮尺係数をm_0とする．

以下では，Krüger（1912）に掲げられている座標換算式について，現代風の関数表記で，かつ若干簡潔にまとめ直した形でその全体をまず示し，その後にそれらの意図するところを逐次できるだけ詳細に解説するという形式を採ることとする．

２．２　経緯度座標から平面直角座標への座標換算式

２．１までの前提の下で，次に示す諸式は，投影しようとする地点の緯度 φ 及び経度 λ 並びに投影先の平面直角座標系の座標系原点に相当する緯度 φ_0 及び経度 λ_0 が既知であるとして，対応する平面直角座標系上における X 座標 x 及び Y 座標 y 並びに子午線収差角 γ 及び縮尺係数 m を求める座標換算式である．

$$\left(\varphi,\ \varphi_0,\ \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 : \mathrm{given}\right)$$

$$x = \frac{2m_0 S_p}{\pi}\left(\xi' + \sum_{j=1}^{5}\alpha_j \sin 2j\xi' \cosh 2j\eta'\right) - m_0 S_{\varphi_0} \tag{5}$$

$$y = \frac{2m_0 S_p}{\pi}\left(\eta' + \sum_{j=1}^{5}\alpha_j \cos 2j\xi' \sinh 2j\eta'\right) \tag{6}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\tau\sqrt{1+\tan^2\chi} + \sigma\tan\chi\tan\Delta\lambda}{\sigma\sqrt{1+\tan^2\chi} - \tau\tan\chi\tan\Delta\lambda}\right) \tag{7}$$

$$m = \frac{2m_0 S_p}{\pi a}\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\tan^2\chi + \cos^2\Delta\lambda}\left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\}} \tag{8}$$

$$\xi' = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\chi}{\cos\Delta\lambda}\right),\quad \eta' = \tanh^{-1}\left(\frac{\sin\Delta\lambda}{\sqrt{1+\tan^2\chi}}\right) \tag{9}$$

$$\tan\chi = \sinh\left(\tanh^{-1}\sin\varphi - \frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\varphi\right)\right) \tag{10}$$

$$\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{5} 2j\alpha_j \cos 2j\xi' \cosh 2j\eta',\quad \tau = \sum_{j=1}^{5} 2j\alpha_j \sin 2j\xi' \sinh 2j\eta' \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 - \frac{127}{288}n^5,\quad \alpha_2 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \frac{281}{630}n^5,\\ &\alpha_3 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \frac{15061}{26880}n^5,\quad \alpha_4 = \frac{49561}{161280}n^4 - \frac{179}{168}n^5,\quad \alpha_5 = \frac{34729}{80640}n^5 \end{aligned} \tag{12}$$

ここで，（５）式，（６）式及び（11）式に現れる和は本来無限和となるべきところであるが，通常の計算機が有する計算精度の範囲内では最初の５項までの和で十分なため，(12) 式に示す展開係数も最初の５項までを当該精度の範囲内で示してある．これは，次の２．３で掲げる式についても同様であり，(20) 式で示す展開係数は最初の５項まで，(22) 式で示す展開係数は分数係数の大きさを考慮して最初の６項までを示してある．

２．３　平面直角座標から経緯度座標への座標換算式

さらに，次に示す諸式は，投影元の平面直角座標系の座標系原点に相当する緯度 φ_0 及び経度 λ_0 並びに投影しようとする地点の平面直角座標系上における X 座標 x 及び Y 座標 y が既知であるとして，対応する緯度 φ 及び経度 λ 並びに子午線収差角 γ 及び縮尺係数 m を求める座標換算式である．

$$(\varphi_0,\ \lambda_0,\ x,\ y:\text{given})$$

$$\varphi=\chi+\sum_{j=1}^{6}\delta_j\sin 2j\chi \tag{13}$$

$$\Delta\lambda=\tan^{-1}\left(\frac{\sinh\eta'}{\cos\xi'}\right),\quad \lambda=\lambda_0+\Delta\lambda \tag{14}$$

$$\gamma=\tan^{-1}\left(\frac{\tau'+\sigma'\tan\xi'\tanh\eta'}{\sigma'-\tau'\tan\xi'\tanh\eta'}\right) \tag{15}$$

$$m=\frac{2m_0S_p}{\pi a}\sqrt{\frac{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}{\sigma'^2+\tau'^2}\left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\}} \tag{16}$$

$$\xi=\frac{\pi}{2m_0S_p}\left(x+m_0S_{\varphi_0}\right),\quad \eta=\frac{\pi}{2m_0S_p}y \tag{17}$$

$$\xi'=\xi-\sum_{j=1}^{5}\beta_j\sin 2j\xi\cosh 2j\eta,\quad \eta'=\eta-\sum_{j=1}^{5}\beta_j\cos 2j\xi\sinh 2j\eta \tag{18}$$

$$\sigma'=1-\sum_{j=1}^{5}2j\beta_j\cos 2j\xi\cosh 2j\eta,\quad \tau'=\sum_{j=1}^{5}2j\beta_j\sin 2j\xi\sinh 2j\eta \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\beta_1=\frac{1}{2}n-\frac{2}{3}n^2+\frac{37}{96}n^3-\frac{1}{360}n^4-\frac{81}{512}n^5,\quad \beta_2=\frac{1}{48}n^2+\frac{1}{15}n^3-\frac{437}{1440}n^4+\frac{46}{105}n^5,\\ &\beta_3=\frac{17}{480}n^3-\frac{37}{840}n^4-\frac{209}{4480}n^5,\quad \beta_4=\frac{4397}{161280}n^4-\frac{11}{504}n^5,\quad \beta_5=\frac{4583}{161280}n^5\end{aligned} \tag{20}$$

$$\chi=\tan^{-1}\left(\frac{\sin\xi'}{\sqrt{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sin\xi'}{\cosh\eta'}\right) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\delta_1=2n-\frac{2}{3}n^2-2n^3+\frac{116}{45}n^4+\frac{26}{45}n^5-\frac{2854}{675}n^6,\quad \delta_2=\frac{7}{3}n^2-\frac{8}{5}n^3-\frac{227}{45}n^4+\frac{2704}{315}n^5+\frac{2323}{945}n^6,\\ &\delta_3=\frac{56}{15}n^3-\frac{136}{35}n^4-\frac{1262}{105}n^5+\frac{73814}{2835}n^6,\quad \delta_4=\frac{4279}{630}n^4-\frac{332}{35}n^5-\frac{399572}{14175}n^6,\\ &\delta_5=\frac{4174}{315}n^5-\frac{144838}{6237}n^6,\quad \delta_6=\frac{601676}{22275}n^6\end{aligned} \tag{22}$$

上記のとおり，α_j，β_j 及び δ_j が求められれば，目的の諸量を計算する数式は基本的には三角関数及び双曲線関数の組合せと総和を取るための繰り返し計算で表され，非常に単純な形をしている．しかも α_j，β_j 及び δ_j は，地球楕円体の扁平の度合いさえ決まれば投影しようとする地点とは無関係に，かつ任意の精度で決定される量であり，諸量の計算に先立ってあらかじめ独立に与えておくことも可能である．しかしながら，

これらα_j，β_j及びδ_jを実際にnについての多項式で表現するためには，非常に面倒な計算を必要とし，Krüger（1912）を参照するだけでは，より高次の項が必要となった際にそれらを計算するための見通しが立てられないのが現状である．また Karney（2011）においても，（13）式の導出だけは Newton 法による繰り返し計算を使っており，首尾一貫性に欠けるところがある．我が国において，上述の換算式が Gauss-Krüger 投影法の主たる計算式として活用されていないのは，このような事情もあるのではないかと考えられる．

以下においては，諸量の導出過程及び相互関係を明らかにするとともに，数式処理ソフトを用いてα_j，β_j及びδ_jを任意次数について求める方法論を紹介する．

３．座標換算式の導出の解説

３．１　等角写像

複素関数論でよく知られているように，ある二次元座標から別の二次元座標に座標換算を行う場合，対応する２つの曲線の成す角が等しくなるためには，両者の座標を複素数で表したときに正則な関数関係があることが要求される．このような写像は等角写像（conformal mapping）と呼ばれている．今回議論の対象にしている平面直角座標と経緯度との間の等角写像による座標換算の場合，緯度については測地緯度の代わりに等長緯度を導入する必要がある．その他，測地測量に特化した等角写像に関する包括的な解説は，小牧（1988）及び政春（2001）を参照されたい．

等角写像の趣旨を踏まえた上で前述の関係を式で表現すると，次式のようになる．

$$\frac{\pi}{2m_0 S_p}(x+\mathrm{i}y)=\xi+\mathrm{i}\eta=f(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)=\tilde{f}(\mathrm{gd}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)),\ \text{すなわち}\ \zeta=\tilde{f}(\zeta')=\tilde{f}(\xi'+\mathrm{i}\eta') \tag{23}$$

ここで$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$は虚数単位を表す．我々の最終目的は，中央子午線上の縮尺係数及び子午線弧長を周長とする円の半径の積で規格化された複素座標$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$と，測地緯度を等長緯度に置き換えた複素経緯度を引数とした Gudermann 関数の関数値$\zeta'=\mathrm{gd}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)$との関数関係を明らかにすることである．その際に条件となるのは，$\eta=\Delta\lambda=0$としたとき，測地緯度φを媒介としてξが規格化された子午線弧長を表すように，すなわち，（4）式の$s(\varphi)$を用いてξが$\xi=\varphi+s(\varphi)$と表されるように，ξと$\chi=\mathrm{gd}\,q$の関数関係が設定されることである．この実軸上における関数関係を複素平面に解析接続することで，ζと$\zeta'=\xi'+\mathrm{i}\eta'$の関数関係（ここでは，(23) 式で示すところの$\tilde{f}$）を求めることになる．ただ，あらわな関数で求められるわけではなく，次式で示されるような Fourier 正弦級数の形式を設定し，展開係数α_j及びβ_jを求めるというアプローチを採る．すなわち，

$$\zeta=\zeta'+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\sin 2j\zeta',\quad \zeta'=\zeta-\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\sin 2j\zeta \tag{24}$$

と表す．さらに，

$$\sigma-\mathrm{i}\tau=\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\zeta'},\quad \sigma'+\mathrm{i}\tau'=\frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{1}{\sigma-\mathrm{i}\tau} \tag{25}$$

で定義されるσ, τ及びσ', τ'を導入する．これらの変数が（11）式及び（19）式で書き下せることは，(24) 式の定義から複素変数の三角関数に係る演算規則を駆使することにより明らかであろう．

３．２　諸式の導出

３．２．１　展開係数の導出

上述までの前提の下で，（12）式，（20）式及び（22）式で示される展開係数α_j，β_j及びδ_jを順次求めていくこととする．我々はまず（１）式として既知である正角緯度χと測地緯度φの関係式から出発

する．すなわち，

$$\mathrm{gd}^{-1}\chi = \mathrm{gd}^{-1}\varphi - \frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\varphi\right) \tag{26}$$

であり，ここで

$$u = \mathrm{gd}^{-1}\varphi,\ \ v = \mathrm{gd}^{-1}\chi,\ \ \tilde{g}(u) = \tilde{g}\left(\mathrm{gd}^{-1}\varphi\right) = g(\varphi) = \frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\varphi\right) \tag{27}$$

と置き直して（26）式を書き換えると，$u = v + \tilde{g}(u)$ となり，Gudermann 関数について Lagrange inversion theorem[2] を適用することにより，

$$\mathrm{gd}\,u = \mathrm{gd}\,v + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}\left\{\tilde{g}(v)^k\,\mathrm{gd}'(v)\right\} \tag{28}$$

が得られる．さらに，

$$\mathrm{gd}'(v) = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\chi}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{gd}^{-1}\chi}{\mathrm{d}\chi}} = \cos\chi,\ \ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\partial}{\partial\chi} = \cos\chi\frac{\partial}{\partial\chi} \tag{29}$$

であることなどに留意して，置き換えた変数を元に戻すと，

$$\varphi = \chi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\cos\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^{k-1}\left[\left\{\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\tanh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin\chi\right)\right\}^k\cos\chi\right] \tag{30}$$

となる．（30）式について Maxima（Maxima.sourceforge.net，2011）を用いて高階の導関数を逐次計算し，正弦関数を整理すれば（22）式の係数 δ_j が n についての多項式として得られ，これに改めて恒等関数について Lagrange inversion theorem を適用することで，その逆関数，すなわち χ を φ で表した Fourier 正弦級数展開式も得られる．この展開式を $\varphi = \chi + h(\varphi)$ とおき直し，（４）式で定義した関数 $z + s(z)$ について Lagrange inversion theorem を適用すれば，

$$\xi = \varphi + s(\varphi) = \chi + s(\chi) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\chi^{k-1}}\left[h(\chi)^k\left\{1 + s'(\chi)\right\}\right] \tag{31}$$

となる．（31）式について Maxima を用いて計算整理することにより，まず（12）式の係数 α_j が得られ，続いてやはり恒等関数について Lagrange inversion theorem を適用することで，（24）式で示されるような関係の下で逆関数を計算することにより（20）式の係数 β_j が得られる．図－１及び図－２は，上述した一連の係数 α_j，β_j 及び δ_j の導出を n^8 の項まで Maxima で行った際の画面抜粋である．図－１の（%o3）が δ_j に，図－２の（%o5）及び（%o6）がそれぞれ α_j 及び β_j に対応する．

[2] Lagrange inversion theorem の日本語による概説については，例えば河瀬（2011）を参照のこと．

```
(%i1) g(p):=2*sqrt(n)/(1+n)*atanh(2*sqrt(n)/(1+n)*sin(p));
```

$$(\%o1)\quad g(p):=\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\,\mathrm{atanh}\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\sin(p)\right)$$

```
(%i2) s(p):=sum((product(3*n/(2*k)-n, k, 1, j))^2*sum((1/l-4*l)*sin(2*l*p)*product((3*n/(2*(j+(-1)^m*floor(m/2)))-n)^((-1)^m), m, 1, l), l, 1, 2*j), j, 0, 6)
        /sum((product(3*n/(2*k)-n, k, 1, j))^2, j, 0, 6);
```

$$(\%o2)\quad s(p):=\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{6}\left(\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{3\,n}{2\,k}-n\right)\right)^{2}\sum_{l=1}^{2\,j}\left(\frac{1}{l}-4\,l\right)\sin(2\,l\,p)\prod_{m=1}^{l}\left(\frac{3\,n}{2\left(j+(-1)^{m}\,\mathrm{floor}\left(\frac{m}{2}\right)\right)}-n\right)^{(-1)^{m}}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{6}\left(\prod_{k=1}^{j}\left(\frac{3\,n}{2\,k}-n\right)\right)^{2}}$$

```
(%i3) expand(trigrat(taylor( g(p)*cos(p) + cos(p)*diff(g(p)^2*cos(p), p)/2! + cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^3*cos(p), p), p)/3!
      + cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^4*cos(p), p), p), p)/4! + cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^5*cos(p), p), p), p), p)/5!
      + cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^6*cos(p), p), p), p), p), p)/6!
      + cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^7*cos(p), p), p), p), p), p), p)/7!
      + cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(cos(p)*diff(g(p)^8*cos(p), p), p), p), p), p), p), p)/8!, n, 0, 8)));
```

$$(\%o3)\quad \frac{1383243703\,n^{8}\sin(16\,p)}{11351340}-\frac{170079376\,n^{8}\sin(14\,p)}{1216215}+\frac{38341552\,n^{7}\sin(14\,p)}{675675}-$$
$$\frac{2155215124\,n^{8}\sin(12\,p)}{14189175}-\frac{115444544\,n^{7}\sin(12\,p)}{2027025}+\frac{601676\,n^{6}\sin(12\,p)}{22275}+\frac{258316372\,n^{8}\sin(10\,p)}{1216215}-$$
$$\frac{2046082\,n^{7}\sin(10\,p)}{31185}-\frac{144838\,n^{6}\sin(10\,p)}{6237}+\frac{4174\,n^{5}\sin(10\,p)}{315}+\frac{14416399\,n^{8}\sin(8\,p)}{935550}+$$
$$\frac{11763988\,n^{7}\sin(8\,p)}{155925}-\frac{399572\,n^{6}\sin(8\,p)}{14175}-\frac{332\,n^{5}\sin(8\,p)}{35}+\frac{4279\,n^{4}\sin(8\,p)}{630}-\frac{2363828\,n^{8}\sin(6\,p)}{31185}+$$
$$\frac{98738\,n^{7}\sin(6\,p)}{14175}+\frac{73814\,n^{6}\sin(6\,p)}{2835}-\frac{1262\,n^{5}\sin(6\,p)}{105}-\frac{136\,n^{4}\sin(6\,p)}{35}+\frac{56\,n^{3}\sin(6\,p)}{15}+$$
$$\frac{141514\,n^{8}\sin(4\,p)}{8505}-\frac{31256\,n^{7}\sin(4\,p)}{1575}+\frac{2323\,n^{6}\sin(4\,p)}{945}+\frac{2704\,n^{5}\sin(4\,p)}{315}-\frac{227\,n^{4}\sin(4\,p)}{45}-$$
$$\frac{8\,n^{3}\sin(4\,p)}{5}+\frac{7\,n^{2}\sin(4\,p)}{3}+\frac{189416\,n^{8}\sin(2\,p)}{99225}+\frac{16822\,n^{7}\sin(2\,p)}{4725}-\frac{2854\,n^{6}\sin(2\,p)}{675}+\frac{26\,n^{5}\sin(2\,p)}{45}+$$
$$\frac{116\,n^{4}\sin(2\,p)}{45}-2\,n^{3}\sin(2\,p)-\frac{2\,n^{2}\sin(2\,p)}{3}+2\,n\sin(2\,p)$$

```
(%i4) expand(trigrat(taylor(sum(diff((-%)^k, p, k-1)/k!, k, 1, 8), n, 0, 8)));
```

$$(\%o4)\quad \frac{256663081\,n^{8}\sin(16\,p)}{56756700}+\frac{3463678\,n^{8}\sin(14\,p)}{467775}-\frac{2405834\,n^{7}\sin(14\,p)}{675675}-\frac{126463\,n^{8}\sin(12\,p)}{72765}-$$
$$\frac{941912\,n^{7}\sin(12\,p)}{184275}+\frac{444337\,n^{6}\sin(12\,p)}{155925}-\frac{12870194\,n^{8}\sin(10\,p)}{1216215}+\frac{1040\,n^{7}\sin(10\,p)}{567}+$$
$$\frac{109598\,n^{6}\sin(10\,p)}{31185}-\frac{734\,n^{5}\sin(10\,p)}{315}-\frac{1097407\,n^{8}\sin(8\,p)}{187110}+\frac{1077964\,n^{7}\sin(8\,p)}{155925}-\frac{24832\,n^{6}\sin(8\,p)}{14175}-$$
$$\frac{12\,n^{5}\sin(8\,p)}{5}+\frac{1237\,n^{4}\sin(8\,p)}{630}+\frac{120202\,n^{8}\sin(6\,p)}{51975}+\frac{44644\,n^{7}\sin(6\,p)}{14175}-\frac{12686\,n^{6}\sin(6\,p)}{2835}+$$
$$\frac{8\,n^{5}\sin(6\,p)}{5}+\frac{34\,n^{4}\sin(6\,p)}{21}-\frac{26\,n^{3}\sin(6\,p)}{15}+\frac{142607\,n^{8}\sin(4\,p)}{42525}-\frac{2288\,n^{7}\sin(4\,p)}{1575}-\frac{1522\,n^{6}\sin(4\,p)}{945}+$$
$$\frac{904\,n^{5}\sin(4\,p)}{315}-\frac{13\,n^{4}\sin(4\,p)}{9}-\frac{16\,n^{3}\sin(4\,p)}{15}+\frac{5\,n^{2}\sin(4\,p)}{3}+\frac{1514\,n^{8}\sin(2\,p)}{1323}-\frac{8384\,n^{7}\sin(2\,p)}{4725}+$$
$$\frac{4642\,n^{6}\sin(2\,p)}{4725}+\frac{32\,n^{5}\sin(2\,p)}{45}-\frac{82\,n^{4}\sin(2\,p)}{45}+\frac{4\,n^{3}\sin(2\,p)}{3}+\frac{2\,n^{2}\sin(2\,p)}{3}-2\,n\sin(2\,p)$$

図－１　数式処理ソフト“Maxima”を用いて計算した結果画面の抜粋（その１）

(%i5) expand(trigrat(taylor(s(p)+sum(diff((-%)^k*(1+diff(s(p), p)), p, k-1)/k!, k, 1, 8), n, 0, 8)));

$$
\begin{aligned}
(\%o5)\quad & \frac{1424729850961\,n^{8}\sin(16\,p)}{743921418240}-\frac{16759934899\,n^{8}\sin(14\,p)}{3113510400}+\frac{1522256789\,n^{7}\sin(14\,p)}{1383782400}+\\
& \frac{175214326799\,n^{8}\sin(12\,p)}{58118860800}-\frac{30705481\,n^{7}\sin(12\,p)}{10378368}+\frac{212378941\,n^{6}\sin(12\,p)}{319334400}+\frac{2605413599\,n^{8}\sin(10\,p)}{622702080}+\\
& \frac{14644087\,n^{7}\sin(10\,p)}{9123840}-\frac{3418889\,n^{6}\sin(10\,p)}{1995840}+\frac{34729\,n^{5}\sin(10\,p)}{80640}-\frac{40176129013\,n^{8}\sin(8\,p)}{7664025600}+\\
& \frac{97445\,n^{7}\sin(8\,p)}{49896}+\frac{6601661\,n^{6}\sin(8\,p)}{7257600}-\frac{179\,n^{5}\sin(8\,p)}{168}+\frac{49561\,n^{4}\sin(8\,p)}{161280}+\frac{79682431\,n^{8}\sin(6\,p)}{79833600}-\\
& \frac{67102379\,n^{7}\sin(6\,p)}{29030400}+\frac{167603\,n^{6}\sin(6\,p)}{181440}+\frac{15061\,n^{5}\sin(6\,p)}{26880}-\frac{103\,n^{4}\sin(6\,p)}{140}+\frac{61\,n^{3}\sin(6\,p)}{240}+\\
& \frac{148003883\,n^{8}\sin(4\,p)}{174182400}+\frac{13769\,n^{7}\sin(4\,p)}{28800}-\frac{1983433\,n^{6}\sin(4\,p)}{1935360}+\frac{281\,n^{5}\sin(4\,p)}{630}+\frac{557\,n^{4}\sin(4\,p)}{1440}-\\
& \frac{3\,n^{3}\sin(4\,p)}{5}+\frac{13\,n^{2}\sin(4\,p)}{48}-\frac{18975107\,n^{8}\sin(2\,p)}{50803200}+\frac{72161\,n^{7}\sin(2\,p)}{387072}+\frac{7891\,n^{6}\sin(2\,p)}{37800}-\\
& \frac{127\,n^{5}\sin(2\,p)}{288}+\frac{41\,n^{4}\sin(2\,p)}{180}+\frac{5\,n^{3}\sin(2\,p)}{16}-\frac{2\,n^{2}\sin(2\,p)}{3}+\frac{n\sin(2\,p)}{2}
\end{aligned}
$$

(%i6) expand(trigrat(taylor(-sum(diff((-%)^k, p, k-1)/k!, k, 1, 8), n, 0, 8)));

$$
\begin{aligned}
(\%o6)\quad & \frac{191773887257\,n^{8}\sin(16\,p)}{3719607091200}-\frac{497323811\,n^{8}\sin(14\,p)}{12454041600}+\frac{219941297\,n^{7}\sin(14\,p)}{5535129600}-\\
& \frac{2204645983\,n^{8}\sin(12\,p)}{12915302400}-\frac{16363163\,n^{7}\sin(12\,p)}{518918400}+\frac{20648693\,n^{6}\sin(12\,p)}{638668800}+\frac{22894433\,n^{8}\sin(10\,p)}{124540416}-\\
& \frac{8005831\,n^{7}\sin(10\,p)}{63866880}-\frac{108847\,n^{6}\sin(10\,p)}{3991680}+\frac{4583\,n^{5}\sin(10\,p)}{161280}+\frac{324154477\,n^{8}\sin(8\,p)}{7664025600}+\\
& \frac{466511\,n^{7}\sin(8\,p)}{2494800}-\frac{830251\,n^{6}\sin(8\,p)}{7257600}-\frac{11\,n^{5}\sin(8\,p)}{504}+\frac{4397\,n^{4}\sin(8\,p)}{161280}-\frac{6457463\,n^{8}\sin(6\,p)}{17740800}+\\
& \frac{9261899\,n^{7}\sin(6\,p)}{58060800}+\frac{5569\,n^{6}\sin(6\,p)}{90720}-\frac{209\,n^{5}\sin(6\,p)}{4480}-\frac{37\,n^{4}\sin(6\,p)}{840}+\frac{17\,n^{3}\sin(6\,p)}{480}+\\
& \frac{24749483\,n^{8}\sin(4\,p)}{348364800}+\frac{51841\,n^{7}\sin(4\,p)}{1209600}-\frac{1118711\,n^{6}\sin(4\,p)}{3870720}+\frac{46\,n^{5}\sin(4\,p)}{105}-\frac{437\,n^{4}\sin(4\,p)}{1440}+\\
& \frac{n^{3}\sin(4\,p)}{15}+\frac{n^{2}\sin(4\,p)}{48}+\frac{7944359\,n^{8}\sin(2\,p)}{67737600}-\frac{5406467\,n^{7}\sin(2\,p)}{38707200}+\frac{96199\,n^{6}\sin(2\,p)}{604800}-\frac{81\,n^{5}\sin(2\,p)}{512}-\\
& \frac{n^{4}\sin(2\,p)}{360}+\frac{37\,n^{3}\sin(2\,p)}{96}-\frac{2\,n^{2}\sin(2\,p)}{3}+\frac{n\sin(2\,p)}{2}
\end{aligned}
$$

Created with wxMaxima.

図－２　数式処理ソフト“Maxima”を用いて計算した結果画面の抜粋（その２）

３．２．２　諸量の相互関係の導出

展開係数の導出が終わったので，引き続き（９）式，(14) 式及び (21) 式にて表される $(\xi',\,\eta')\Leftrightarrow(\chi,\,\Delta\lambda)$ の相互関係の導出を行う．まず，定義式である $\zeta'=\xi'+\mathrm{i}\eta'=\mathrm{gd}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)=\mathrm{gd}(\mathrm{gd}^{-1}\chi+\mathrm{i}\Delta\lambda)$ から出発する．これと（２）式で示される逆 Gudermann 関数の表式を用いて， $\mathrm{gd}^{-1}\zeta'=\mathrm{gd}^{-1}\chi+\mathrm{i}\Delta\lambda$ を書き換えると，

$$
\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\xi'+\mathrm{i}\eta'}{2}\right)=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\right|+\mathrm{i}\Delta\lambda=\ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\exp(\mathrm{i}\Delta\lambda)\right\}\tag{32}
$$

となるので，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\xi'+\mathrm{i}\eta'}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\exp(\mathrm{i}\Delta\lambda)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)(\cos\Delta\lambda+\mathrm{i}\sin\Delta\lambda) \tag{33}$$

を得る．ここで，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\xi'+\mathrm{i}\eta'}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\xi'\right)+\mathrm{i}\sinh\eta'}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\xi'\right)+\cosh\eta'}=\frac{\cos\xi'+\mathrm{i}\sinh\eta'}{\cosh\eta'-\sin\xi'} \tag{34}$$

となる[3]ことに留意して，（33）式の実数部と虚数部を分離すると，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\cos\Delta\lambda=\frac{\cos\xi'}{\cosh\eta'-\sin\xi'},\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)\sin\Delta\lambda=\frac{\sinh\eta'}{\cosh\eta'-\sin\xi'} \tag{35}$$

となる．まず（35）式両式の辺々比を取ることにより，

$$\tan\Delta\lambda=\frac{\sinh\eta'}{\cos\xi'} \tag{36}$$

が得られる．一方，（35）式両式について辺々自乗して和を取ると，

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)=\frac{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}{(\cosh\eta'-\sin\xi')^2}=\frac{\cosh^2\eta'-\sin^2\xi'}{(\cosh\eta'-\sin\xi')^2}=\frac{\cosh\eta'+\sin\xi'}{\cosh\eta'-\sin\xi'} \tag{37}$$

となり，さらに上式の左辺から $\sin\chi$ を作ると，

$$\sin\chi=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)}=\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)-1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\chi}{2}\right)+1}=\frac{\sin\xi'}{\cosh\eta'} \tag{38}$$

が得られる．あとは，χ 及び $\Delta\lambda$ に係る他の三角関数についても，

$$\cos\chi=\frac{\sqrt{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}}{\cosh\eta'},\quad \tan\chi=\frac{\sin\xi'}{\sqrt{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}} \tag{39}$$

$$\cos\Delta\lambda=\frac{\cos\xi'}{\sqrt{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}},\quad \sin\Delta\lambda=\frac{\sinh\eta'}{\sqrt{\cos^2\xi'+\sinh^2\eta'}} \tag{40}$$

のように表され，これらから（9）式，（14）式及び（21）式が得られる．

---

[3] 例えば，森口ほか（1957）を参照のこと．

３．２．３ 子午線収差角及び縮尺係数の導出

次に，子午線収差角γ及び縮尺係数mを求める．まずγについては，定義から

$$\tan\gamma = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{\varphi=\mathrm{const}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\Delta\lambda}}{\dfrac{\partial y}{\partial\Delta\lambda}} = \frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial\Delta\lambda}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial\Delta\lambda}} = \frac{-\mathrm{Im}\left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\right)}{\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\right)} \tag{41}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)} &= \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\zeta'}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)} = (\sigma-\mathrm{i}\tau)\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{gd}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)} = \frac{\sigma-\mathrm{i}\tau}{\cosh(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\\ &= \frac{\sigma-\mathrm{i}\tau}{\cosh q\cos\Delta\lambda+\mathrm{i}\sinh q\sin\Delta\lambda} = \frac{1}{\cosh q\cos\Delta\lambda}\cdot\frac{\sigma-\mathrm{i}\tau}{1+\mathrm{i}\tanh q\tan\Delta\lambda}\\ &= \frac{1}{\cosh q\cos\Delta\lambda}\cdot\frac{(\sigma-\tau\tanh q\tan\Delta\lambda)-\mathrm{i}(\tau+\sigma\tanh q\tan\Delta\lambda)}{1+\tanh^2 q\tan^2\Delta\lambda}\end{aligned} \tag{42}$$

であるから，上式最終結果の分子の実数部及び虚数部を取ることによって

$$\tan\gamma = \frac{\tau+\sigma\tanh q\tan\Delta\lambda}{\sigma-\tau\tanh q\tan\Delta\lambda} = \frac{\tau+\sigma\sin\chi\tan\Delta\lambda}{\sigma-\tau\sin\chi\tan\Delta\lambda} \tag{43}$$

となり，したがって，

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\tau+\sigma\sin\chi\tan\Delta\lambda}{\sigma-\tau\sin\chi\tan\Delta\lambda}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tau\sqrt{1+\tan^2\chi}+\sigma\tan\chi\tan\Delta\lambda}{\sigma\sqrt{1+\tan^2\chi}-\tau\tan\chi\tan\Delta\lambda}\right) \tag{44}$$

すなわち（７）式を得る．この後，(25) 式，(36) 式及び (39) 式を用いることにより，(15) 式も容易に導かれる．

また，縮尺係数mについては，地球楕円体の卯酉線曲率半径をN_φとすると，

$$m^2 = \frac{m_0^2}{N_\varphi^2\cos^2\varphi}\left|\frac{\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\right|^2 \tag{45}$$

と表され，

$$\frac{1}{N_\varphi^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{a^2}\left\{1-\frac{4n}{(1+n)^2}\sin^2\varphi\right\}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{a^2}\left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \tag{46}$$

$$x+\mathrm{i}y = \frac{2S_p}{\pi}(\xi+\mathrm{i}\eta) = \frac{2S_p}{\pi}\zeta \tag{47}$$

であること及び（42）式前段の途中結果を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
m^2 &= \left(\frac{2m_0 S_p}{\pi a}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\right|^2 \\
&= \left(\frac{2m_0 S_p}{\pi a}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \left|\frac{\sigma-\mathrm{i}\tau}{\cosh(q+\mathrm{i}\Delta\lambda)}\right|^2 \\
&= \left(\frac{2m_0 S_p}{\pi a}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \frac{\sigma^2+\tau^2}{\cosh^2 q\cos^2\Delta\lambda+\sinh^2 q\sin^2\Delta\lambda} \\
&= \left(\frac{2m_0 S_p}{\pi a}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sinh^2 q+\cos^2\Delta\lambda} \\
&= \left(\frac{2m_0 S_p}{\pi a}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{1-n}{1+n}\tan\varphi\right)^2\right\} \frac{\sigma^2+\tau^2}{\tan^2\chi+\cos^2\Delta\lambda}
\end{aligned} \tag{48}
$$

となり，これから（８）式が得られる．この後，(25）式，(39）式及び（40）式を用いることにより，(16）式も容易に導かれる．

かくして，２．２及び２．３で示した座標換算式の全体の導出が完了した．

４．プログラム応用例

以下では，導出した計算式の正確性の確認を目的として，JavaScript を用いて HTML ファイル上にプログラミングしたソースコードを掲げる．示されているソースコードをそのまま HTML ファイルとして保存し，適当な Web ブラウザで参照すれば特にソフトウェアを必要とせずに計算を実行する．あくまでもこれまで導出してきた計算式の正確性の確認だけを目的として即席で作成したものであり，数値の入出力インタフェースなどは極めて簡易に処理しているので，実用的なものにするためには更なる改善が必要であることは言及しておきたい．

展開係数の入力や初期値の準備の部分を除けば，ソースコードに示されている肝心の計算の部分は思いのほかすっきりしていることが見て取れる．

４．１　経緯度⇒直角座標換算プログラム例

```
<html>
<head>
<title>Krueger の式により（φ, λ → X, Y）の座標換算を行うページ</title>
<script><!--
function sinh(x) { return 0.5*(Math.exp(x)-Math.exp(-x)) }
function cosh(x) { return 0.5*(Math.exp(x)+Math.exp(-x)) }
function arctanh(x) { return 0.5*Math.log((1+x)/(1-x)) }
a=6378137 ; rf=298.257222101 ; m0=0.9999 ; s2r=Math.PI/648000 ; n=0.5/(rf-0.5)
n15=1.5*n ; anh=0.5*a/(1+n) ; nsq=n*n
e2n=2*Math.sqrt(n)/(1+n) ; ra=2*anh*m0*(1+nsq/4+nsq*nsq/64)
jt=5 ; jt2=2*jt ; ep=1.0 ; e=[] ; s=[0.0] ; t=[] ; alp=[]
for(k=1; k<=jt; k++) { ep*=e[k]=n15/k-n ; e[k+jt]=n15/(k+jt)-n }

// 展開パラメータの事前入力
alp[1]=(1/2+(-2/3+(5/16+(41/180-127/288*n)*n)*n)*n)*n
alp[2]=(13/48+(-3/5+(557/1440+281/630*n)*n)*n)*nsq
```

```
alp[3]=(61/240+(-103/140+15061/26880*n)*n)*n*nsq
alp[4]=(49561/161280-179/168*n)*nsq*nsq
alp[5]=34729/80640*n*nsq*nsq

// 平面直角座標の座標系原点の緯度を度単位で、経度を分単位で格納
phi0=[0,33,33,36,33,36,36,36,36,36,40,44,44,44,26,26,26,26,20,26]
lmbd0=[0,7770,7860,7930,8010,8060,8160,8230,8310,8390,8450,8415,8535,8655,8520,7
650,7440,7860,8160,9240]

// 該当緯度の 2 倍角の入力により赤道からの子午線弧長を求める関数
function Merid(phi2) {
   dc=2.0*Math.cos(phi2) ; s[1]=Math.sin(phi2)
   for(i=1; i<=jt2; i++) { s[i+1]=dc*s[i]-s[i-1] ; t[i]=(1.0/i-4.0*i)*s[i] }
   sum=0.0 ; c1=ep ; j=jt
   while(j) {
      c2=phi2 ; c3=2.0 ; l=j ; m=0
      while(l) { c2+=(c3/=e[l--])*t[++m]+(c3*=e[2*j-l])*t[++m] }
      sum+=c1*c1*c2 ; c1/=e[j--]
   }
   return anh*(sum+phi2)
}

// 与件入力
num=eval(prompt("座標系番号を入力してください。"))
phi=eval(prompt("緯度を ddmmss.ssss 形式で入力してください。"))
lmbd=eval(prompt("経度を dddmmss.ssss 形式で入力してください。"))

phideg=Math.floor(phi/10000) ; phimin=Math.floor((phi-phideg*10000)/100)
phirad=(phideg*3600+phimin*60+phi-phideg*10000-phimin*100)*s2r
lmbddeg=Math.floor(lmbd/10000) ; lmbdmin=Math.floor((lmbd-lmbddeg*10000)/100)
lmbdsec=lmbddeg*3600+lmbdmin*60+lmbd-lmbddeg*10000-lmbdmin*100

// 実際の計算実行部分
sphi=Math.sin(phirad) ; nphi=(1-n)/(1+n)*Math.tan(phirad)
dlmbd=(lmbdsec-lmbd0[num]*60)*s2r
sdlmbd=Math.sin(dlmbd) ; cdlmbd=Math.cos(dlmbd)
tchi=sinh(arctanh(sphi)-e2n*arctanh(e2n*sphi)) ; cchi=Math.sqrt(1+tchi*tchi)
xi=xip=Math.atan2(tchi, cdlmbd) ; eta=etap=arctanh(sdlmbd/cchi) ; sgm=1 ; tau=0
for(j=alp.length; --j; ) {
   alsin=alp[j]*Math.sin(2*j*xip) ; alcos=alp[j]*Math.cos(2*j*xip)
   xi+=alsin*cosh(2*j*etap) ; eta+=alcos*sinh(2*j*etap)
   sgm+=2*j*alcos*cosh(2*j*etap) ; tau+=2*j*alsin*sinh(2*j*etap)
}

x=ra*xi-m0*Merid(2*phi0[num]*3600*s2r) ; y=ra*eta
gmm=Math.atan2(tau*cchi*cdlmbd+sgm*tchi*sdlmbd, sgm*cchi*cdlmbd-tau*tchi*sdlmbd)
m=ra/a*Math.sqrt((sgm*sgm+tau*tau)/(tchi*tchi+cdlmbd*cdlmbd)*(1+nphi*nphi))

// ラジアン → 度分秒変換
```

```
sgn=(gmm<0)
gdo=Math.floor(gmm/s2r/3600)+sgn
gfun=Math.floor((gmm/s2r-gdo*3600)/60)+sgn
gbyou=gmm/s2r-gdo*3600-gfun*60

// 結果表示
document.write("<h2>座標系番号： " + num + "　　緯度： " + phi + "　　経度： " + lmbd +
"<br/><br/>")
document.write("Ｘ＝" + x + "，Ｙ＝" + y + "<br/>")
document.write("γ＝" + (sgn?"－":"＋") + Math.abs(gdo) + "° " + Math.abs(gfun) + "′
" + Math.abs(gbyou) + "″，m＝" + m + "<br/></h2>")

// --></script>
</head>
<body/>
</html>
```

４．２　直角座標⇒経緯度換算プログラム例

```
<html>
<head>
<title>Kruegerの式により（X, Y → φ, λ）の座標換算を行うページ</title>
<script><!--
function sinh(x) { return 0.5*(Math.exp(x)-Math.exp(-x)) }
function cosh(x) { return 0.5*(Math.exp(x)+Math.exp(-x)) }
a=6378137 ; rf=298.257222101 ; m0=0.9999 ; s2r=Math.PI/648000 ; n=0.5/(rf-0.5)
n15=1.5*n ; anh=0.5*a/(1+n) ; nsq=n*n ; ra=2*anh*m0*(1+nsq/4+nsq*nsq/64)
jt=5 ; jt2=2*jt ; ep=1.0 ; e=[] ; s=[0.0] ; t=[] ; beta=[] ; dlt=[]
for(k=1; k<=jt; k++) { ep*=e[k]=n15/k-n ; e[k+jt]=n15/(k+jt)-n }

// 展開パラメータの事前入力
beta[1]=(1/2+(-2/3+(37/96+(-1/360-81/512*n)*n)*n)*n)*n
beta[2]=(1/48+(1/15+(-437/1440+46/105*n)*n)*n)*nsq
beta[3]=(17/480+(-37/840-209/4480*n)*n)*n*nsq
beta[4]=(4397/161280-11/504*n)*nsq*nsq
beta[5]=4583/161280*n*nsq*nsq
dlt[1]=(2+(-2/3+(-2+(116/45+(26/45-2854/675*n)*n)*n)*n)*n)*n
dlt[2]=(7/3+(-8/5+(-227/45+(2704/315+2323/945*n)*n)*n)*n)*nsq
dlt[3]=(56/15+(-136/35+(-1262/105+73814/2835*n)*n)*n)*n*nsq
dlt[4]=(4279/630+(-332/35-399572/14175*n)*n)*nsq*nsq
dlt[5]=(4174/315-144838/6237*n)*n*nsq*nsq
dlt[6]=601676/22275*nsq*nsq*nsq

// 平面直角座標の座標系原点の緯度を度単位で、経度を分単位で格納
phi0=[0,33,33,36,33,36,36,36,36,36,40,44,44,44,26,26,26,26,20,26]
lmbd0=[0,7770,7860,7930,8010,8060,8160,8230,8310,8390,8450,8415,8535,8655,8520,7
650,7440,7860,8160,9240]

// 該当緯度の2倍角の入力により赤道からの子午線弧長を求める関数
function Merid(phi2) {
```

```
    dc=2.0*Math.cos(phi2) ; s[1]=Math.sin(phi2)
    for(i=1; i<=jt2; i++) { s[i+1]=dc*s[i]-s[i-1] ; t[i]=(1.0/i-4.0*i)*s[i] }
    sum=0.0 ; c1=ep ; j=jt
    while(j) {
        c2=phi2 ; c3=2.0 ; l=j ; m=0
        while(l) { c2+=(c3/=e[l--])*t[++m]+(c3*=e[2*j-l])*t[++m] }
        sum+=c1*c1*c2 ; c1/=e[j--]
    }
    return anh*(sum+phi2)
}

// 与件入力
num=eval(prompt("座標系番号を入力してください。"))
x=eval(prompt("x 座標を m 単位で入力してください。"))
y=eval(prompt("y 座標を m 単位で入力してください。"))

// 実際の計算実行部分
xip=xi=(x+m0*Merid(2*phi0[num]*3600*s2r))/ra ; etap=eta=y/ra ; sgmp=1 ; taup=0
for(j=beta.length; --j; ) {
    besin=beta[j]*Math.sin(2*j*xi) ; becos=beta[j]*Math.cos(2*j*xi)
    xip-=besin*cosh(2*j*eta) ; etap-=becos*sinh(2*j*eta)
    sgmp-=2*j*becos*cosh(2*j*eta) ; taup+=2*j*besin*sinh(2*j*eta)
}

sxip=Math.sin(xip) ; cxip=Math.cos(xip) ; shetap=sinh(etap) ; chetap=cosh(etap)
phi=chi=Math.asin(sxip/chetap)
for(j=dlt.length; --j; ) { phi+=dlt[j]*Math.sin(2*j*chi) }
nphi=(1-n)/(1+n)*Math.tan(phi)

lmbd=lmbd0[num]*60+Math.atan2(shetap, cxip)/s2r
gmm=Math.atan2(taup*cxip*chetap+sgmp*sxip*shetap,
sgmp*cxip*chetap-taup*sxip*shetap)
m=ra/a*Math.sqrt((cxip*cxip+shetap*shetap)/(sgmp*sgmp+taup*taup)*(1+nphi*nphi))

// ラジアン → 度分秒変換
ido=Math.floor(phi/s2r/3600)
ifun=Math.floor((phi/s2r-ido*3600)/60)
ibyou=phi/s2r-ido*3600-ifun*60
keido=Math.floor(lmbd/3600)
keifun=Math.floor((lmbd-keido*3600)/60)
keibyou=lmbd-keido*3600-keifun*60
sgn=(gmm<0)
gdo=Math.floor(gmm/s2r/3600)+sgn
gfun=Math.floor((gmm/s2r-gdo*3600)/60)+sgn
gbyou=gmm/s2r-gdo*3600-gfun*60

// 結果表示
document.write("<h2>座標系番号： " + num + "    X座標： " + x + "    Y座標： " + y +
"<br/><br/>")
```

```
document.write("φ＝" + ido + "°　" + ifun + "′　" + ibyou + "″，λ＝" + keido + "°　" + keifun + "′　" + keibyou + "″<br/>")
document.write("γ＝" + (sgn?"－":"＋") + Math.abs(gdo) + "°　" + Math.abs(gfun) + "′　" + Math.abs(gbyou) + "″，m＝" + m + "<br/></h2>")

// --></script>
</head>
<body/>
</html>
```

５．まとめ

現在我が国における平面直角座標系に使用されている Gauss-Krüger 投影の表式は,投影しようとする経度範囲が狭いという設定の下に導出されたものであり，非常に不規則的な展開式であるために既存の書物を参照できない場合はその導出を再現するのは極めて困難であるばかりでなく，広範囲な投影には使用できないものである.

今回，Karney（2011）に触発されて，Krüger の論文に記載されている，計算機の支援を得られやすい数式の導出をできるだけ懇切丁寧に紹介するとともに，これまで唯一面倒であった展開係数の計算について，数式処理システムを用いることで再現性を高め，かつ十分な精度まで求める道筋をつけることができた.

Gauss-Krüger 投影の原典とも言える Krüger の論文発表から一世紀が経とうとしているが，今後遅ればせながらでも本論で紹介した座標換算方法が我が国においても広く活用されることを期待するものである.

参 考 文 献

Karney, C. F. F.（2011）: Transverse Mercator with an accuracy of a few nanometers, Journal of Geodesy, to be published,
Preprint: http://arxiv.org/abs/1002.1417v3（accessed 7 Jun. 2011）.

河瀬和重（2009）：緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般的な計算式，国土地理院時報，119, 45-55,
http://www.gsi.go.jp/common/000054736.pdf（accessed 3 Mar. 2011）.

河瀬和重（2011）：赤道からの子午線弧長を任意に与えて該当する緯度を求めるより簡明な計算方法，国土地理院時報，121,101-108.

国土地理院（2002）：「平面直角座標 x, y から緯度，経度および子午線収差角を求める計算」及び「緯度・経度から平面直角座標 x, y および子午線収差角を求める計算」,
http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/algorithm/xy2bl/xy2bl.htm 及び
http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/algorithm/bl2xy/bl2xy.htm（accessed 19 Apr. 2011）.

国土地理院編（2011）：作業規程の準則（平成 20 年国土交通省告示第 413 号，最終改正平成 23 年国土交通省告示第 334 号），付録６　計算式集，基準点測量 2.9 及び 2.10,
http://psgsv.gsi.go.jp/koukyou/jyunsoku/pdf/furoku-6.pdf（accessed 1 Apr. 2011）.

小牧和雄（1988）：回転楕円体に準拠した空間座標の決定，現代測量学，第４巻，測地測量①，日本測量協会，東京，第４章.

Krüger, L. ed.（1903）: Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene（Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung）, in Carl Friedrich Gauss Werke, Band 9, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, in commission bei B. G. Teubner in Leipzig, Göttingen, 141-218,
http://www.archive.org/details/carlfriedrichga01gausgoog（accessed 26 Apr. 2011）.

Krüger, L.（1912）: Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, Veröffentlichung Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge, 52, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Potsdam, 172p,
http://bib.gfz-potsdam.de/pub/digi/krueger2.pdf（accessed 13 Oct. 2009）.

政春尋志（2000）：ガウス=クリューゲル図法とガウス正角二重図法について，地図，38(3)，1-11.
政春尋志（2001）：ガウス=クリューゲル図法投影式の導出法―予備知識を明確にした解説の試み―，地図，39(4)，31-37.
政春尋志（2008）：ガウス-クリューゲル図法Krueger(1912)第一公式の再評価，日本地球惑星科学連合2008年大会予稿集，
http://wwwsoc.nii.ac.jp/jepsjmo/cd-rom/2008cd-rom/program/pdf/J166/J166-P002.pdf (accessed 31 Mar. 2011).
Maxima.sourceforge.net (2011)：Maxima, a Computer Algebra System, Version 5.23.2,
http://maxima.sourceforge.net/ (accessed 1 Mar. 2011).
森口繁一，宇田川銈久，一松信（1957）：数学公式II―級数・フーリエ解析，岩波書店，東京，220.
野村正七（1983）：地図投影法，日本地図センター，東京，第IX章.
坂元左馬太（1934）：グーデルマンの角と實双曲線函數及び指數函數の計算に就て，土木学会誌，20(9)，1081-1086,
http://library.jsce.or.jp/Image_DB/mag/m_jsce/20-09/20-9-12230.pdf (accessed 31 Mar. 2011).