

## 緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般的な計算式 A General Formula for Meridional Distance from the Equator to Given Latitude

企画部 河瀬和重  
Planning Department Kazushige KAWASE

### 要 旨

任意の測地緯度に対し、赤道から当該緯度までの子午線弧長を求める計算式については、我が国においては地球楕円体の第一離心率による冪級数展開式が提案されている例が圧倒的に多く、第一離心率の二乗よりも小さい量で展開した式は、一世紀以上も前に提案されているにもかかわらず我が国では認知度も薄く、ほとんど使われていないのが現状である。

この式が第一離心率による展開式よりも収束が速く、簡潔に表現されるにもかかわらず我が国で用いられてこなかったのは、式の導出過程が必ずしも明確でなく、あまり理解しやすいものになっていない

ということが原因の一つとして推測される。

本論では、従来から使われてきた式よりも収束が速く、かつ一般項を与えられて任意の精度まで子午線弧長の計算を実行することが容易にできる式を明確な方法論で導出することを試みる。

提案する式は簡潔かつ完全な一般項を与え、計算機へのプログラミングが非常に簡便に行うことができるとともに、現行我が国で一般的に使われている式よりも格段に収束が速いものであり、今回この有用な計算式の導出過程を明確化させたことで、今後懸念材料が払拭された形での測量業務への適用が期待されることである。

### 1. はじめに

$a$  を地球楕円体の長半径、 $e$  を地球楕円体の第一離心率とすると、一般的に測地緯度  $\varphi$  が与えられた際の子午線弧長  $S$  は、

$$S = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \quad (1)$$

で表される。(1)式には楕円積分が含まれているため当然ながら初等関数では表すことができず、被積分関数中の  $e^2$  を十分小さい量とみなし、これについて冪級数展開して有限項までの和で打ち切った量の項別積分を行うのが常道である。こうした試みは18世紀後期にその萌芽(Lambert, 1772. 測地緯度でなく地心緯度を与えられた際の子午線弧長を求める冪級数展開式の導出)が認められ、同世紀末に(1)式に対する  $e^8$  までの展開項を求めた成果(Delambre, 1799)をもって一応の達成をみている。

我が国においてもこれに倣い、国土地理院あるいはその前身である陸地測量部等の時代から、各種測量作業規程等において要求する精度に応じ当該方法論が用いられてきたのは周知のことである。しかしながら、その表式(国土地理院編, 1988)においては非常に煩雑な係数が延々と並び記され、ある版の作業規程の印刷時に係数の一部の数字“58720256”を“5870256”と転記ミスしてしまったという事故もかつて実際に起きている。

参考までに、(1)式の  $e^{10}$  までの展開項を次式に掲げる。

$$S \approx a(1-e^2) \left( C_1 \varphi - C_2 \frac{\sin 2\varphi}{2} + C_3 \frac{\sin 4\varphi}{4} - C_4 \frac{\sin 6\varphi}{6} + C_5 \frac{\sin 8\varphi}{8} - C_6 \frac{\sin 10\varphi}{10} \right) \quad (2)$$

$$C_1 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10}$$

$$C_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10}, \quad C_3 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10}$$

$$C_4 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10}, \quad C_5 = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10}, \quad C_6 = \frac{693}{131072}e^{10}$$

(2) 式のとおり,  $e^{10}$  までの展開項の時点で, 係数の既約分数中にある数値が既に最大で十進数 6 桁までに達しており, 凡人が丸暗記の対象として記憶に留めておくことのできる範囲を遥かに超越している. このように,  $e^{10}$  までの展開項を一瞥しただけでも, この式を取り扱うには非常に神経を使い, 不便であることが見て取れる.

なお, 国土地理院編 (1988) においては  $e^{16}$  までの展開項が示されているが, ここでは紙面を費やして煩雑な式を漏れなく再掲することが目的ではなく, 2. 2 において (6) 式として提示するより簡潔な式及び (6) 式の表式をより高次項まで示した, 付録 2. として掲げる結果との比較対象として用いるために, 敢えて  $e^{10}$  までの掲載に留めている. またちなみに, (2) 式中において存置されている  $1-e^2$  を各展開項に繰り込んでしまえば, もう少し各係数は簡単になり収束性も幾許かは改善されるのだが, これまで国土地理院ではそのような措置が執られている痕跡は認められない.

もちろん (1) 式の一般項による表示は不可能ではないが, 飛田ほか (2009) で示されているように, 計算機への親和性という観点で格段に煩雑さが解消されたとはまだまだ言い難い状況にある.

## 2. 通例とは異なるアプローチによる過去の取組

### 2. 1 過去に Bessel が提案した式

一方, 今を遡ること 170 年以上も前 (天保年間) に, Bessel は  $e^2 = 4n/(1+n)^2$  で定義される新たな量  $n$  を用いて (1) 式を次のように変形した後, 被積分関数の分母部分を  $n$  について冪級数展開し, 項別積分を試みて最初の数項の展開項を導出している (Bessel, 1837)<sup>1</sup>.

$$S = \int_0^\varphi \frac{a(1-n)^2(1+n)}{(1+2n\cos 2\theta+n^2)^{3/2}} d\theta \quad (3)$$

$n$  は, 地球楕円体の短半径を  $b$ , 扁平率を  $f$  とするとき,

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{f}{2-f} = \frac{1}{2f^{-1}-1} \quad (4)$$

で与えられる量であり, 海外においてはこの量を“第三扁平率”と呼んでいる文献例 (Lapaine et al., 2007) も存在するようである. 確かに, 第一離心率  $e$  及び第二離心率  $e'$  の定義式:  $e = \sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$  及び  $e' = \sqrt{(a^2-b^2)/b^2}$  とのアナロジーから, 仮に“第一扁平率  $f_1$ ”を  $f_1 = f = (a-b)/a$  とし, “第二扁平率  $f_2$ ”を  $f_2 = (a-b)/b$  としたとき,  $n$  と  $f_1$  及び  $f_2$  との間には,

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (5)$$

なる関係が成り立ち, このことからすれば  $n$  は“第三扁平率”と呼ぶに相応しい量<sup>2</sup>に見受けられなくもない. 実際, 過去の欧米の書物にもそのような整理がなされている痕跡を認めることができる (例えば, König et al., 1951).

しかしながら, この量そのものが我が国においてあまり普及していないこともあり, 測量地図関係の学際領域全体において“第三扁平率”という呼称が一般的なものなのかどうかについては, 筆者が浅学であるためその詳細は定かではない. とにかくも, この  $n$  なる量は,  $e^2 = f(2-f)$  の  $1/4$  倍程度と更に小さく, 同等相当の展開次数で比較すれば展開式の収束が速くなることは間違い無い.

<sup>1</sup> 次頁脚注 3 を参照のこと.

<sup>2</sup> 文献によっては, “第三の量”を“第一の量”と“第二の量”の調和平均として定義している例もある (例えば, Комаровский, 2005).

## 2. 2 過去に Helmert が提案した式

Bessel の得た結果は (3) 式の被積分関数の分子にある係数  $(1-n)^2(1+n)$  を保持した状態での展開結果に留まっていたが、その約 40 年後 (明治前期) に Helmert は、(3) 式の被積分関数の分母からの寄与における、 $n$  についての展開各項を  $(1-n^2)^2$  で強制的に除することによって、非常に見通しの良い次式に示す趣旨の近似結果を得た (Helmert, 1880).

$$S \approx \frac{a}{1+n} \left\{ \left( 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right) \varphi - \frac{3}{2} \left( n - \frac{n^3}{8} \right) \sin 2\varphi + \frac{15}{16} \left( n^2 - \frac{n^4}{4} \right) \sin 4\varphi - \frac{35}{48} n^3 \sin 6\varphi + \frac{315}{512} n^4 \sin 8\varphi \right\} \quad (6)$$

Helmert が得た結果は (6) 式を構成する各項をそれぞれ求めたものであり、筆者が知る限りにおいて、子午線弧長の計算式が (6) 式の形式で具体的に表現されている最も古い論文は Krüger (1912) であるが、この論文の該当箇所には脚注で Helmert (1880) 46/47 頁への参照がされている。Helmert (1880) においては、「この  $n$  なる量は 1837 年に Bessel が用いた」旨の記述があり、引用文献として “Abhandlungen Band 3, S. 44” が挙げられているが、これは Bessel の没後に編纂された論文集 (Engelmann, 1876) を指しているものと推定される。実際、Engelmann (1876) の該当頁 (原典である Bessel (1837) の 338 頁<sup>3</sup>に相当) には、確かに子午線弧長の計算式に  $n$  に相当する量が使われているのが認められるが、前述のとおり (6) 式のような見通しのよい結果までには至っていない。以上から、本論では (6) 式を「Helmert が提案した式」と称することとする。

なお、Helmert (1880) においては、Bessel の取組とほぼ同時期に実施された、2. 1 での議論から類推すれば “第三離心率の二乗” ともいえる量：

$$m = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{1/e^2+1/e'^2} \quad (7)$$

を用いた取組の経緯 (Puissant, 1842; Fischer, 1868) について言及がなされるとともに、 $S$  を  $m$  で冪級数展開した際の初めの数項についても掲載されており、収束性の良し悪しの順序付けとして、 $n$  による冪級数展開が最も良く、次いで  $m$  ( $\cong 2n$ )、そして最も収束が悪いのが  $e^2$  ( $\cong 4n$ ) であると結論付けている。

(6) 式は、第一離心率を用いた、ほぼ同じ精度を有する展開式である (2) 式に比べて構成される項がほぼ半減し、しかも係数はより簡単な既約分数で表されるなど、非常に簡潔にまとまっており、欧米では当該係数が Krüger (1912) 以降の著書 (例えば、König et al., 1951; Rapp, 1991; Комаровский, 2005<sup>4</sup> など) にも間接的にはあるものの紹介されている。しかしながら、Helmert (1880) においては、(6) 式の導出

に当たって、(3) 式において  $\frac{1}{(1-n^2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)n^{2k}$  を展開各項から強制的に抽出し、最終的に  $1/(1+n)$  を

共通因数としてまとめるという手法を採っている。すなわち、ある意味で強引な力技に頼っているところがあり、非常に導出過程が不明確になっているのに加え、系統的に一般項まで求められてはいないのが現状である。

子午線弧長を  $n$  を用いて書き下した表式については、日本語で書かれた書物としては海外の著書の訳書 (Hofmann-Wellenhof et al., 翻訳: 西, 2005) において紹介されているほかは、我が国においてはほとんど知られていない。我が国において (6) 式がこれまで一般的に使われなかったのは、このような導出過程の不明確さが、(6) 式が解析的に正しい表式を有限項で打ち切ったという通常の意味合いでの近似式なのか、それとも解析的な根拠が無い、単なる実務上の近似式なのかどうかを曖昧なものとし、使用を躊躇する原因の一つとなっていたのではないかと推測される。

なお、(6) 式がこれだけ簡潔にまとまった表式でありながら第一離心率を用いた展開式に比べて非常に収束が速く、(2) 式として示した  $e^{10}$  までの展開式を遥かに凌ぐ収束性を有しているという事実等については、

<sup>3</sup> Bessel (1837) と Engelmann (1876) との間には被積分関数中の累乗数値に齟齬があるが、導出結果から推察するに Bessel (1837) の記載は印刷ミスと判断し、本論においては Engelmann (1876) の記載に基づき議論を展開している。

<sup>4</sup> 既約分数係数の数字の一部について誤記があり、“512” であるべきところが “5112” となっている。

飛田ほか (2009) において詳細に調べられている。

### 3. 従来の式より簡易にかつ収束が速く高精度計算を実現する一般式の提案

#### 3. 1 Helmert が提案した式の一般化

子午線弧長に関する古典を紐解いた歴史的回顧については概ね前記のとおりであるが、これに対し、本論では (6) 式の出自をより明確化する目的で、より一般的な表式をある特定の有限項まで打ち切った場合の式として (6) 式を説明することを目指す。一般化に当たって、まず (1) 式を第二種楕円積分と初等関数に分離する。すなわち、

$$S = a \left( \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (8)$$

と変形する。この結果については楕円積分や楕円関数の研究が精力的に行われた近世以来の既知の事実であると認識しているが、導出に当たって高度な数学的知識は必要としないものの、天下り式に導出できる類のものでは必ずしも無く、少なくとも筆者の調べた範囲内では日本語で (1) 式から (8) 式に至る導出過程の詳細を解説した文献が存在しなかったため、念のため独自に導出した過程を付録 1. に示しておいた。

#### 3. 1. 1 分離した第二種楕円積分の $-n$ についての冪級数展開

さらに、(8) 式において  $e^2 = 4n/(1+n)^2$  及び  $2\theta = \tau$  なる変換を施すと、(8) 式は次式のように書き換えられる。

$$S = \frac{a}{1+n} \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\varphi} \sqrt{1 + 2n \cos \tau + n^2} d\tau - \frac{2n \sin 2\varphi}{\sqrt{1 + 2n \cos 2\varphi + n^2}} \right) \quad (9)$$

(9) 式は、共通因数として  $1/(1+n)$  を既に有した表式となっており、(6) 式も同様に  $1/(1+n)$  で括り出されている表式となっていることに着目し、 $n$  についての表現という観点で類似の形式を既に有している (9) 式を  $n$  について冪級数展開することを試みる。すなわち、今の場合当然に  $|n| < 1$  であるので、(9) 式中の括弧内第一項にある被積分関数は、直交多項式の一種である Gegenbauer 多項式  $C_i^{-1/2}(\cos \tau)$  を生成する母関数とみなすことができる (森口ほか, 1960)。したがって、(9) 式で与えられる  $S$  の括弧内第一項 (定積分の  $1/2$  倍,  $S_1$  とおく) は、 $-n$  についての冪級数展開が可能であり、次式のように一般項にて整理することができる。

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv \frac{1}{2} \int_0^{2\varphi} \sqrt{1+2n\cos\tau+n^2} d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\varphi} \sum_{i=0}^{\infty} (-n)^i C_i^{-1/2}(\cos\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\varphi} \sum_{i=0}^{\infty} (-n)^i \sum_{k=0}^i \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(i-k-1/2)}{k!(i-k)!\Gamma(-1/2)^2} \cos(i-2k)\tau d\tau \\
&= \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{2j}}{2} \sum_{k=0}^{2j} \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(2j-k-1/2)}{k!(2j-k)!\Gamma(-1/2)^2} \cos(2j-2k)\tau d\tau \\
&\quad - \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{2j+1}}{2} \sum_{k=0}^{2j+1} \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(2j+1-k-1/2)}{k!(2j+1-k)!\Gamma(-1/2)^2} \cos(2j+1-2k)\tau d\tau \\
&= \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} n^{2j} \left\{ \frac{1}{2} \prod_{r=1}^j \left(1 - \frac{3}{2r}\right)^2 + \sum_{k=0}^{j-1} \cos(2j-2k)\tau \prod_{r=1}^k \left(1 - \frac{3}{2r}\right) \prod_{s=1}^{2j-k} \left(1 - \frac{3}{2s}\right) \right\} d\tau \\
&\quad - \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} n^{2j+1} \sum_{k=0}^j \cos(2j+1-2k)\tau \prod_{r=1}^k \left(1 - \frac{3}{2r}\right) \prod_{s=1}^{2j+1-k} \left(1 - \frac{3}{2s}\right) d\tau \\
&= \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \prod_{r=1}^j \left(\frac{3n}{2r} - n\right)^2 + \sum_{k=1}^j \cos 2k\tau \prod_{r=1}^{j-k} \left(\frac{3n}{2r} - n\right) \prod_{s=1}^{j+k} \left(\frac{3n}{2s} - n\right) \right\} d\tau \\
&\quad + \int_0^{2\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{j+1} \cos(2k-1)\tau \prod_{r=1}^{j-k+1} \left(\frac{3n}{2r} - n\right) \prod_{s=1}^{j+k} \left(\frac{3n}{2s} - n\right) d\tau \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \varphi \prod_{r=1}^j \varepsilon_r^2 + \sum_{k=1}^j \frac{\sin 4k\varphi}{2k} \prod_{r=1}^{j-k} \varepsilon_r \prod_{s=1}^{j+k} \varepsilon_s + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{\sin(4k-2)\varphi}{2k-1} \prod_{r=1}^{j-k+1} \varepsilon_r \prod_{s=1}^{j+k} \varepsilon_s \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \varphi \prod_{k=1}^j \varepsilon_k^2 + \sum_{l=1}^{2j} \frac{\sin 2l\varphi}{l} \prod_{r=1}^{j-\lfloor(l+1)/2\rfloor} \varepsilon_r \prod_{s=1}^{j+\lfloor l/2\rfloor} \varepsilon_s \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \right)^2 \left\{ \varphi + \sum_{l=1}^{2j} \frac{\sin 2l\varphi}{l} \prod_{m=1}^l \varepsilon_{j+(-1)^m \lfloor m/2 \rfloor}^{(-1)^m} \right\} \tag{10}
\end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon_i = 3n/2i - n$ であり、また $\Gamma(x)$ はガンマ関数を、 $\lfloor x \rfloor$ は $x$ 以下の最大の整数を指すものとする。さらに、総和記号( $\Sigma$ )及び総乗記号( $\Pi$ )による演算において、和・積を形成する範囲が空となる場合、当該和は0と、当該積は1と規約する。(10)式の最終結果に至るまでの導出過程は多少複雑ではあるものの、最終結果そのものは非常に簡潔にまとめられている。

なお、(3)式中にある被積分関数の分母部分の冪級数展開により Bessel が得た展開各項については、 $C_i^{3/2}(\cos 2\theta) = C_i^{3/2}(\cos \tau)$ を用いて同様に一般化できる((10)式の最終結果において、式中に二箇所ある $\varepsilon_i$ の部分 $\delta_i = -n/2i - n$ に置き換えるだけでよい)が、依然として係数 $(1-n)^2(1+n)$ を処理し切れていないため、3. 1. 2で述べる(15)式に比べて収束性という観点では若干劣ることを付記しておく。

### 3. 1. 2 Helmert が提案した式の一般項の導出

(10)式の結果から、(9)式は一旦次のように整理することができる。

$$S = \frac{a}{1+n} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \right)^2 \left\{ \varphi + \sum_{l=1}^{2j} \frac{\sin 2l\varphi}{l} \prod_{m=1}^l \varepsilon_{j+(-1)^m \lfloor m/2 \rfloor}^{(-1)^m} \right\} - \frac{2n \sin 2\varphi}{\sqrt{1+2n \cos 2\varphi + n^2}} \right] \quad (11)$$

(11) 式の時点で、(9) 式括弧内の第一項 (前出の  $S_1$ ) は一般項で書き下すことができたが、 $S$  全体を  $\varphi$  についての一次単項式と  $\varphi$  の偶数倍を位相とする正弦高調波の級数とで書き下すには未だ至っていない。これを実行するには、(9) 式括弧内の第一項  $S_1$  と第二項 ( $S_2$  とおく) との間において、次の関係が成り立っていることに着目する。すなわち、

$$\frac{d^2 S_1}{d\varphi^2} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\varphi} \sqrt{1+2n \cos \tau + n^2} d\tau \right) = -\frac{2n \sin 2\varphi}{\sqrt{1+2n \cos 2\varphi + n^2}} = S_2 \quad (12)$$

となっている。一方 (10) 式の結果から、 $S_1$  については、

$$S_1 = \alpha_0 \varphi + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \sin 2l\varphi \quad (13)$$

という形に展開できていることが分かっているので、(12) 式の実事から、

$$S_2 = \frac{d^2 S_1}{d\varphi^2} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \alpha_0 \varphi + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \sin 2l\varphi \right) = \sum_{l=1}^{\infty} -4l^2 \alpha_l \sin 2l\varphi \quad (14)$$

が成り立つ。したがって、最終的に子午線弧長  $S$  を与える一般式として、

$$S = \frac{a}{1+n} (S_1 + S_2) = \frac{a}{1+n} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \right)^2 \left\{ \varphi + \sum_{l=1}^{2j} \left( \frac{1}{l} - 4l \right) \sin 2l\varphi \prod_{m=1}^l \varepsilon_{j+(-1)^m \lfloor m/2 \rfloor}^{(-1)^m} \right\} \quad (15)$$

とまとめることができる。上式で  $j=2$  まで取れば、Helmert が導出したとされる (6) 式が得られる。従来の第一離心率による冪級数展開式で、国土地理院編 (1988) において規定している  $e^{16}$  までの冪展開による数値相当以上の結果を得るには、 $j=3$  までで既にほぼ要求が満たされ、 $j=4$  まで取れば過剰なほどに十分である。(15) 式について  $j=4$  まで取ってあらわに展開項を示した結果を付録 2. に掲げた。これだけ高次までの展開項でありながら、係数の既約分数中にある数値の最大桁数は、 $e^{10}$  までしか示されていない (2) 式と同じ十進数 6 桁までに留まっていることに注目されたい。

また (15) 式を一瞥して、各  $j$  に対して全体が  $\left( \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \right)^2$  で括られていることから、高次項は概ね  $n^2 (10^{-6})$

のオーダー) 倍ずつされたものが順次寄与していくことが分かる。この事実は、実際に付録 2. に掲げた展開項からも確認できることである。これに対し第一離心率で展開した (2) 式は、高次項について概ね  $e^2 (10^{-3})$  のオーダー) 倍ずつされたものが寄与していく。(6) 式が (2) 式よりも格段に収束性が良いのは、同等のオーダーである  $n$  と  $e^2$  との大小関係もさることながら、(6) 式がもともと  $n^2$  ではなく  $-n$  について冪級数展開した式に由来しているものであるにもかかわらず  $n$  の冪が一つ飛ばしに現れるという、冪級数展開式の構造上の要因が大きく寄与しているものと考えられる。

さらに (15) 式から、(8) 式において分離した初等関数は正弦高調波成分のみに関与し、その寄与は第一

項の楕円積分からの寄与よりもかなり大きいことが分かる。このため、収束速度のみに関心を払うのであれば、(11) 式のように別途初等関数を分離して独立に計算するほうが、同じ打切項までの計算において収束はより速くなる。

### 3. 2 提案した一般式の計算機への適用例

#### 3. 2. 1 プログラムソースコードの例示

(11) 式あるいは (15) 式は、計算機へのプログラミングという観点においても非常に親和性の高い表式となっている。そのことを如実に示す例として、(11) 式に基づき、 $j$  の打切数をユーザ入力により受け取り、赤道を起点とする子午線弧長を緯度  $0^\circ$  から  $90^\circ$  まで  $5^\circ$  刻みに求めて出力する、AWK によるプログラムソースコードを次に掲げる。

```
BEGIN {
  a=6378.137 ; rf=298.257222101 ; n=0.5/(rf-0.5) ; n15=1.5*n ; an=a/(1.0+n)
  rho=3.14159265358979323846264/180.0 ; s[0]=0.0
  getline jt < "/dev/stdin" ; jt2=2*jt
  ep=1.0 ; for(k=1; k<=jt; k++) { ep*=e[k]=n15/k-n ; e[k+jt]=n15/(k+jt)-n }
  for(deg=0; deg<=90; deg+=5) {
    phi=deg*rho ; phi2=2.0*phi ; dc=2.0*cos(phi2) ; t[1]=s[1]=sin(phi2)      #
    for(i=2; i<=jt2; i++) { s[i]=dc*s[i-1]-s[i-2] ; t[i]=s[i]/i }          #
    sum=0.0 ; cs1=ep
    for(j=jt; j>=1; j--) {
      c2=1.0 ; cs2=phi
      for(l=1; l<=j; l++) {
        c2/=e[j-l+1] ; cs2+=c2*t[2*l-1]
        c2*=e[j+1] ; cs2+=c2*t[2*l]
      }
      sum+=cs1*cs1*cs2 ; cs1/=e[j]
    }
    printf "%2d %22.16f¥n", deg, an*(sum-2.0*n*s[1]/sqrt(n*(n+dc)+1.0)+phi)  #
  }
}
```

前記ソースコードを適当なファイル名でテキストファイルとして保存し、コマンドプロンプト上で AWK の実行ファイルの実行時に読み込むだけで、事務用パソコンでも実際に計算を実行できる。AWK は、通常は編集したいテキストファイルを読み込んで、文字列置換などの各種のテキスト処理を施すことを主目的としてかつて使われていたインタプリタ言語であるが、編集対象となるテキストファイルを読み込む前段階 (BEGIN ブロック) において、簡易な各種の数値演算を行うことができる。

AWK は、テキスト処理においてはもはや一般的な言語ではなく、テキスト処理という枠を超えて、より高機能を有した Perl や Ruby などが現在は主に使われているが、AWK は文法や変数の体裁が C 言語に類似しており、一方で変数や配列の宣言等を必要とせず、また実数と整数の判断も自動的に行い倍精度計算をしてくれるので、プログラム実行時におけるプログラマ側の自己責任部分は大きくなるものの、導出式の初期段階における検算はもとより、プログラムソースの例を示すには適切と判断した。

なお、(15) 式に基づいたプログラムソースコードも前記ソースコードと本質的に変わるものではなく、前記ソースコードの末尾に “#” (AWK ではコメントの始まり記号に相当するので、このまま実行しても害害は無い) を記した行が多少変わるだけである。

### 3. 2. 2 提示したソースコードの特徴

前記ソースコードのとおり、定数及び配列の定義並びに数値の入出力部分を除いた計算の核心部分は非常に単純な構造をしており、システムに固有依存する特別な関数などを参照することも無く高々十数行のコードで記述することができ、CやFORTRANなどの科学技術計算に通常用いられている言語にも容易に実装可能であることが確認できる。

さらに、ソースコード中に用いられているアラビア数字は、楕円パラメータ及び円周率を除いては、実質“0”、“1”、“2”の三種類しか使われていないことに注目されたい。すなわち、従来の式を使ったプログラミングの際のような係数数値についての面倒な照合チェックは不必要となり、ほんの数箇所しか出現しない配列の添え字の入力さえ間違えなければ、あとはいかに高次までの項を計算しようとも、それは打切数の設定のみに依存し、プログラマは楕円パラメータと円周率の数値の正確性だけに気を配ってさえすればよくなるため、プログラミング時におけるバグの発生要因も幾分か低減されるものと思われる。

また、消費するメモリリソースについては、前記ソースコードには三種類の一次元配列が使用されているが、必要となる各配列の大きさは計算精度から勘案して多めに見積もっても高々十程度であり、最近の計算機であれば全く問題ない。前記ソースコードでは、打切数をユーザ入力により得る形態としており、プログラムの実行時には未定量であるが、あらかじめ固定しておき、事前に計算しておくことができる配列を計算しておくなどすれば、より効率は向上するであろう。

なお、前記ソースコードでは、測地緯度について $\varphi$ と $2\varphi$ の二種類の変数を使い分けているが、楕円パラメータのうち、長半径 $a$ の数値定義の代わりに $a/2$ をあらかじめ数値定義しておくことにより、 $2\varphi$ の設定のみで全体の計算ができ、計算コストを変化させずに $\varphi$ を一変数分省略することが可能ではある。しかしながら、プログラム全体が分かりにくくなるため、前記ソースコードにおいては敢えてそこまでは措置していない。

最後に、前記ソースコードは計算時間の点においても多少の配慮はなされている。すなわち、計算機において演算コストを多大に費やすといわれている三角関数について、前記ソースコード上では、着目している特定の測地緯度 $\varphi$ に対して、(11)式において別途分離している初等関数中にも存在する $\sin 2\varphi$ 及び $2\cos 2\varphi$ をそれぞれ一回ずつのみ呼び

出すこととしている。 $\sin 4\varphi$ 以降の高調波成分に使われる正弦関数は、 $l \geq 2$ として、

$$\sin 2l\varphi = 2\cos 2\varphi \sin 2(l-1)\varphi - \sin 2(l-2)\varphi \quad (16)$$

で与えられる漸化式により、それぞれ一回ずつのみ実行される乗算及び減算に置き換えて順次生成するように措置しており、これにより現行の式に匹敵する計算時間で必要な精度の子午線弧長の計算が実行できる。

### 4. まとめ

赤道から任意測地緯度までの子午線弧長を求める計算式については、これまでの式でも、測量業務に適用するに当たっては十分な精度及び妥当な計算時間を有していた。しかしながら、一世紀以上も前により簡潔な計算式が導出されており、かつ当時の我が国においてもこの式の存在を知り得る状況にあったであろうと想像されるにもかかわらず、これまで我が国において転記ミスなどの事故が起こる蓋然性が極めて高い、煩雑な計算式が敢えて使われ続けてきたことについては非常に残念なことであると言わざるを得ない。

また、子午線弧長はそれ自体のみならず、例えば地理学的経緯度座標から平面直角座標へ換算する際のような、別な数値の計算を実施するための中間値としても用いられることがあり、今後の計算機の性能向上により、より高精度な計算を実施する必要性が生じることも考えられる。その際には、是非とも容易に一般項へ拡張できる表式の提示が必要であるが、今回これを純粋に計算機へのプログラミングが容易な形式で導出することができた。

導出された計算式は、これまでの第一離心率を用いた展開式よりも非常に少ない情報量で必要十分な精度の計算結果が得られるとともに、導出の過程が明確な形で示されているので、今後は「出自が不明確」というような懸念材料が払拭された状況の下で、この式が我が国においても測量業務の様々な場面で安んじて適用されていくことが期待されるであろう。

### 謝 辞

本稿を取りまとめるに当たって、国土地理院地理地殻活動研究センターの、政春尋志センター長及び飛田幹男地殻変動研究室長には大変有益な御助言をいただいた。ここに記して感謝申し上げる。

## 参考文献

- Bessel, F. W. (1837): Bestimmung der Axen des elliptischen Rotations sphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, *Astronomische Nachrichten*, 14, 333-346,  
[http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle\\_query?1837AN....14..333B&data\\_type=PDF\\_HIGH&whole\\_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf](http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1837AN....14..333B&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf) (accessed 13 Oct. 2009).
- Delambre, J. B. J. (1799): *Méthodes Analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien; précédées d'un mémoire sur le même sujet par A. M. Legendre*, De L'Imprimerie de Crapelet, Paris, 72-73,  
<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView/ECHOzogiLib?pn=92&ws=1.5&ww=1&wh=1&mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/YTQVS0WC/pageimg> (accessed 13 Oct. 2009).
- Engelmann, R. ed. (1876): *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel*, 3, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 41-47,  
<http://ia351439.us.archive.org/1/items/abhandlungenvon00bessgoog/abhandlungenvon00bessgoog.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- Fischer, P. (1868): *Untersuchungen über die Gestalt der Erde*, Verlag von Joh. Ph. Diehl, Darmstadt, 1-15,  
[http://books.google.com/books?id=ZY89AAAAYAAJ&printsec=frontcover&hl=ja&source=gbs\\_navlinks\\_s#v=onepage&q=&f=false](http://books.google.com/books?id=ZY89AAAAYAAJ&printsec=frontcover&hl=ja&source=gbs_navlinks_s#v=onepage&q=&f=false) (accessed 13 Oct. 2009).
- Helmert, F. R. (1880): *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*, Einleitung und 1 Teil, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 44-48,  
<http://ia301506.us.archive.org/2/items/diemathematisch01helmgoog/diemathematisch01helmgoog.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. and Collins, J., 西修二郎 訳 (2005): *GPS 理論と応用, シュプリンガー・フェアラーク東京*, 327-328.
- 国土地理院編 (1988): *精密測地網一次基準点測量作業規程*, 55-56.
- Комаровский, Ю. А. (2005): *Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении: Учебное пособие, Издание второе, переработанное и дополненное, Морской государственный университет, Владивосток*, 42, 69-71,  
<http://www.msun.ru/edu/lit/kaf/tss/ell.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- König, R. and Weise, K. H. (1951): *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*, 1, *Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 4, 19, 50.
- Krüger, L. (1912): *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*, Veröffentlichung Königlich Preussischen geodätischen Institutes, Neue Folge, 52, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Potsdam, 12,  
<http://bib.gfz-potsdam.de/pub/digi/krueger2.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- Lambert, J. H. (1772): *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, 3 Theil, Im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin, 35-55,  
<http://www.kuttaka.org/~JHL/L1772a.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- Lapaine, M. and Tutić, D. (2007): *O novoj službenoj kartografskoj projekciji Hrvatske - HTRS96/TM, Kartografija i Geoinformacije*, 6 No. izv, Hrvatsko Kartografsko Društvo, 34-53,  
[http://www.kartografija.hr/kig/upload/clanci/KiG7a\\_Lapaine\\_Tutic.pdf](http://www.kartografija.hr/kig/upload/clanci/KiG7a_Lapaine_Tutic.pdf) (accessed 13 Oct. 2009).
- 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信 (1960): *数学公式Ⅲ—特殊函数*, 岩波書店, 東京, 86-87.
- Puissant, L. (1842): *Traité de Géodésie; ou, Exposition des Méthodes Trigonométriques et Astronomiques, applicables à la Mesure de la terre, et à la Construction du Canevas des Cartes Topographiques*, 1, Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris, 295-304,

<http://ia331407.us.archive.org/3/items/traitdegodsie00unkngoog/traitdegodsie00unkngoog.pdf>  
(accessed 13 Oct. 2009).

Rapp, R. H. (1991): Geometric Geodesy, Part I, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, 36-40,

[https://kb.osu.edu/dspace/bitstream/1811/24333/1/Rapp\\_Geom\\_Geod\\_Vol\\_I.pdf](https://kb.osu.edu/dspace/bitstream/1811/24333/1/Rapp_Geom_Geod_Vol_I.pdf) (accessed 13 Oct. 2009).

飛田幹男, 河瀬和重, 政春尋志 (2009): 赤道からある緯度までの子午線長を計算する3つの計算式の比較, 測地学会誌, 55, 印刷中.

#### 付録1. (8) 式の導出について

まず, 部分積分の実行に続いて正負相殺する量を挿入する変形により,

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} d\theta &= \left[ \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} \right]_0^\varphi - \int_0^\varphi \frac{e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta - \int_0^\varphi \frac{e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\ &\quad - \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\ &= \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \end{aligned}$$

が成り立つことから,  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ であることを念頭に置いて,

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta &= \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} d\theta + \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{e^2} \int_0^\varphi \frac{1-(1-e^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} d\theta + \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{e^2} \left( \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta} d\theta \right) + \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{F(\varphi, e) - E(\varphi, e)}{e^2} + \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

を得る. ここで,  $F(\varphi, e)$  及び  $E(\varphi, e)$  はそれぞれ第一種及び第二種楕円積分を表す. 一方,

$$\begin{aligned}
F(\varphi, e) &\equiv \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} \\
&= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} - e^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\
&= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} - e^2 \int_0^\varphi \frac{1-\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\
&= (1-e^2) \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} + e^2 \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta
\end{aligned}$$

であるので、最終的に目的とする次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\int_0^\varphi \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta &= F(\varphi, e) - e^2 \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\
&= E(\varphi, e) - \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \\
&= \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

付録2. (15) 式の  $j=4$  まで ( $n^8 \cong e^{16}/63800 \cong 6.32 \times 10^{-23}$  までに相当) の展開項について

$$\begin{aligned}
S &\approx \frac{a}{1+n} \sum_{j=0}^4 \left( \prod_{k=1}^j \varepsilon_k \right)^2 \left\{ \varphi + \sum_{l=1}^{2j} \left( \frac{1}{l} - 4l \right) \sin 2l\varphi \prod_{m=1}^l \varepsilon_{j+(-1)^m \lfloor m/2 \rfloor}^{(-1)^m} \right\}, \quad \text{ただし } \varepsilon_i = \frac{3n}{2i} - n \\
&\approx \frac{a}{1+n} (A\varphi + B \sin 2\varphi + C \sin 4\varphi + D \sin 6\varphi + E \sin 8\varphi + F \sin 10\varphi + G \sin 12\varphi + H \sin 14\varphi + I \sin 16\varphi)
\end{aligned}$$

$$A = 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \frac{25}{16384} n^8, \quad B = -\frac{3}{2} \left( n - \frac{n^3}{8} - \frac{n^5}{64} - \frac{5}{1024} n^7 \right)$$

$$C = \frac{15}{16} \left( n^2 - \frac{n^4}{4} - \frac{5}{128} n^6 - \frac{7}{512} n^8 \right), \quad D = -\frac{35}{48} \left( n^3 - \frac{5}{16} n^5 - \frac{7}{128} n^7 \right)$$

$$E = \frac{315}{512} \left( n^4 - \frac{7}{20} n^6 - \frac{21}{320} n^8 \right), \quad F = -\frac{693}{1280} \left( n^5 - \frac{3}{8} n^7 \right)$$

$$G = \frac{1001}{2048} \left( n^6 - \frac{11}{28} n^8 \right), \quad H = -\frac{6435}{14336} n^7, \quad I = \frac{109395}{262144} n^8$$