

宇宙測地における座標系の取り扱いについて  
—その2 数学・物理そして宇宙測地—  
Reference Frames in Space Geodesy Era  
—Part 2: Mathematics, Physics and Space-Geodesy

地理地殻活動研究センター 松坂 茂  
Geography and Crustal Dynamics Research Center Shigeru MATSUZAKA

## 要 旨

近年の宇宙測地技術によって確立され維持されている基準座標系について解説する。その1では、物理測地的な観点から日常生活に密接な関係のある標高の基準について解説した。その2にあたる本稿では幾何学的な側面を取り上げ、座標系の基本的概念の概観の後、測地学や天文学で用いられる様々な座標系と座標系相互の変換等に関して一般的な解説を試みる。また、先ごろ改訂された日本の測地基準系に関しては、その変動やコロケーションの話題について触れる。

### 1. 座標系概観

座標系とは、物事を述べたり、調べたり比較したりするのに必要な基準、別の言葉で言いかえると「物差し」を定めたもののことを言う。さらに、物差しには何らかの目盛りがついていたほうが便利であり、物差しの当て方、あるいは数も複数あった方が、都合がよい。さて、それらの物差しをどう置くかによって基準となる枠組み (frame of reference) が決まる。もちろん、座標系という概念は、物理数学だけでなく、社会学的にも、心理学的にも適用できる考え方だが、ここでは、本稿の主旨である幾何学の話、特に天文学や測地学で使われる座標系の概念に限って話を進めることにする。さて、普段の生活において、我々が座標系をあからさまに意識するという場合は少ない。自分の位置を知りたいというときは、目印となるものとの相対的な関係を知れば良いことがほとんどであるし、地図上で自分がどこにいるかを見つければ、絶対的な位置もわかる。その場合、座標系は無条件に与えられているもの、つまり地図上の緯度・経度として示されたものと無意識に仮定しているわけである。測量や地図作成、土木工事などは例外的に座標を意識せざるをえない分野であったといえる。ところが、近年になって、特にGPSの普及によって位置というものが身近に感じられるようになってきた。カーナビやGPS携帯では自分の位置だけでなく、相手や興味ある対象の位置情報の取得・交換などが容易に行えるようになった。そのときの“位置”は、画面 (地図) 上ではポイントや名前として現れるが、機械の中では“数値データ”として表現されている。地図 (map) は曲

がった地球の表面を平面上に表現 (写像: mapping) したもののだが、正確ですばやい情報処理のためには図形を連続的に変換する写像だけでは不十分であり、地図上の点に数値が与えられている必要がある。そのための基準として座標系が存在するのである。

座標系のある程度厳密な数学的取り扱いと、物理世界との関係については、附録にまとめたので興味ある読者は適宜参照されたい。

### 2. 様々な座標系とその関係

この節では測地学に関係する様々な座標系を見てゆくことにしよう。ただし、ここでいう座標系は、我々が構築し実際に座標値を用いることを前提にしているもので、理論上は遠くの星々までを含む座標系が可能でも、定義の及ぶ範囲は地球近傍に限られる。また、附録にもあるように4次元時空を扱うので、時間軸 (時系) も含まれる。

#### 2. 1 座標系の実現

座標系の実現 (realization) とは、理論的に考えられた座標系の表現として、空間内の幾つかの点 (基準点) に数値 (座標値) を与えることである。ある座標系を仮定して、適切な観測を行うと、その点の位置や速度が得られる。このことによって逆に座標系が表現されたと考えるのである。

例えば、今立っている位置に印をし、鉛直方向をz軸、磁北をy軸、東をx軸として、自分の周りの点の位置を測量していけば、局所3次元座標系が得られる。地球全体を対象にするには、宇宙技術の力がどうしても必要で、GPSやVLBI、SLRなどの観測局の位置とその変化を記述することによって、地球の基準系が作られている。また、地球外の天体を対象とした座標系でおなじみのものには、星の位置 (とその動き) を示した星表 (FK5など) があり、赤経、赤緯、固有運動、年周視差で星の方向と速度、距離を示している。ただし、年周視差は観測が難しく、観測できる星、またその精度も限られている。

#### 2. 2 天球座標系

座標系を作るとき、その基準となるものはなるべく変化しないほうがよい。その意味で、非常に遠く (数億~数10億光年) にあるクェーサーや一部の銀河

系は、地球から見て相互の位置関係は実質的に不変とみなしてよい。そこで、これらの天体を基準として天球座標系が構築される。ただし、宇宙空間の中で距離を測ることは極めて難しく、遠くの星までの距離は推定しかできないので、この座標系では空間部分は方向のみが意味を持つ。原点は、太陽系の重心にとることが自然の選択である。太陽系の運動は慣性運動に十分近いと考えてよいからである。

かつては、2. 1の最後に述べたように光学観測によって天球座標系が構築・維持されてきたが、VLBIの登場によって遠方の電波源を非常に精度良く観測することが可能となり、現在は電波によって観測された準星等の方向を基準としている。基準となる方向は、1ミリ秒角以下で決定されている。

世界的に天体観測やデータ解析のための標準となっているのはIERS (International Earth Rotation and Reference frame Service, 国際地球回転及び座標系事業) が発表しているICRF (International Celestial Reference Frame, 国際天球座標系) であり、唯一の観測手段であるVLBIの観測によって構築される。

もちろん、光学観測による天球座標系も重要であるので、現在では新しい人工衛星による光学観測によって構築された精度の良い座標系 (ヒッパルコス・カタログ) が、ICRFと整合を取られて使われている。

### 2. 3 太陽系重心の力学座標系

太陽系内の天体の運動を記述する座標系であり、本質的に上の天球座標系と同じものであるが、地球や月、各惑星の動きを記述するため空間座標も定義されなければならない。

原点は太陽系の重心にとる。空間座標は、三軸の方向を指定してもよいが、一般には基準となる平面とそれに直交する1軸の方向を決めることで実現できる。天球座標系では、基準平面は平均赤道面であり、それに直行する軸が北極となる。座標を決めるためには、さらに平面内に基点を設ける必要があり、それが赤径のゼロ方向である。

精密な天体の動きを記述するには、一般相対論に則り、太陽系内の天体が作り出す計量を用いて測地線の方程式を解く必要がある (附録参照)。計算には普通、ニュートン近似 (a23) をさらに進めたポスターニュートン近似による計量テンソルが用いられる。その計量テンソルの成分は、 $t$ を太陽系重心における座標時 (TCB)、 $\mathbf{x}$ を位置ベクトルとして、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2w + 2w^2, \\ g_{0i} &= 4w^i, \\ g_{ij} &= -\delta_{ij}(1 + 2w), \quad (1 \leq i, j \leq 3) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= G \int d^3x' \frac{\sigma(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{2} G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \sigma(t, \mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \\ w^i(t, \mathbf{x}) &= G \int d^3x' \frac{\sigma^i(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \end{aligned}$$

と  $w^i$  は、それぞれ重力質量密度とその流れである。

また、重力場における光の伝播も接ベクトルの長さが0の測地線 (null geodesics) の方程式を解くことによって求められる。光が測地線に沿って地点1から地点2に伝播するときの時間差を表した式を光差方程式といい、VLBIやSLRの観測方程式の基本となっている。光が重力場で曲げられる現象 (重力レンズ) も、出発と到着の方向ベクトルの差をとることによって求められる。

天体位置の標準的な値はNASAのジェット推進研究所 (JPL) が計算した暦DE405が用いられる。

### 2. 4 地心座標系

太陽系内で動く地球とともに動く座標系である。地球は自由落下して (測地線上を動いて) いるから、地球重心の運動を記述することによって作られる。ただし、ここでいう地心系は測地で一般に使っている地球固定の座標系とは違うことに注意されたい。

地球重心において、互いに正規直交する4つのベクトル (tetrad)  $e_i$  ( $0 \leq i \leq 3$ , ただし  $e_0$  は、地心の4元速度) をとる。そのtetradが平行移動するという条件から、各時刻におけるベクトルの方向が決まる。地心においてそのtetradを接ベクトルにもつ曲線 (測地線) が座標軸となるわけである。地球から遠くに離れない限りはそれらの曲線は直線とみなされるので、それによって地心系が構築される (図-1)。

ここで面白いのは、このようにして決めた座標軸が地球の運動とともに、天球座標系に対してゆっくり回転することである。この現象は慣性系の引きずりとして知られており、大きさは小さいが歳差や章動と同じように地球軌道に垂直な軸の回転をもたらす。

時系は、地心においた時計から重力による影響を除いたTCG (地心座標時) または、ジオイド上に置いた時計の示すTT (地球時) を用いる。

### 2. 5 地球固定座標系

地球上及び地球付近の位置・運動を記述するには、地球といっしょに自転する系 (地球固定) が一番適している。このような系は、地殻に固定された

基準点の位置を与えることによって実現される。一般には、原点を地心とし、赤道面がxy平面、北極方向をz軸とする座標系が用いられる。

現在、標準となっているのがIERSが構築しているITRF (International Terrestrial Reference Frame, 国際地球座標系) であり、VLBI, LLR, SLR, GPS, DORISの観測結果を総合して基準点位置を計算、維持している。

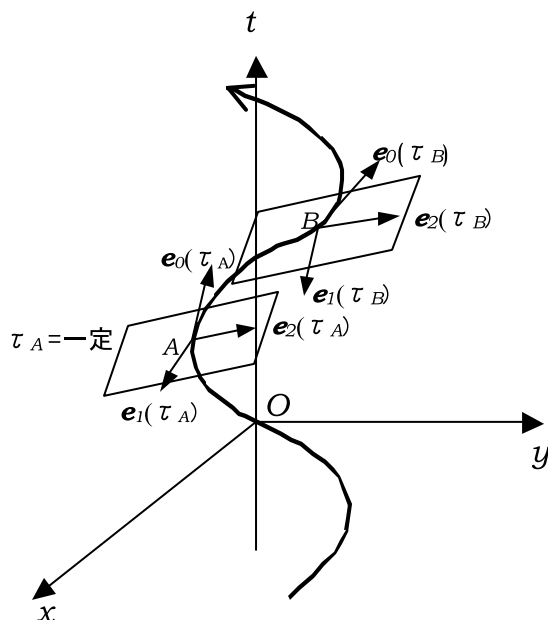


図-1 地球の運動とtetrad

## 2.6 局所座標系

さらに、地球上である部分のみを対象とする形が局所系であり、各国の測地系やリージョナルな系はその一例である。

## 3. 天球から地球へ

天球座標と地球座標の変換によって、地球上での観測と理論的に構成した我々のまわりの宇宙を記述する座標系との整合がとれることになる。大筋は変わらないが、観測技術の進歩、理論の発展等によって保証される精度や、手続きの変化は必然である。例えば、VLBIによる遅延時間決定精度は、数十ピコ (10<sup>-12</sup>) 秒であるから理論式においては10<sup>-13</sup>秒以上の項が考慮されるべきである。

基本的な関係式と現在の標準的な変換手続きを以下に示す。

### 3.1 太陽系から地心系 (非回転系)

まず、太陽系重心系から地心系は、 $X^i$ の2次以上の高次項を無視すると、

$$x^i = x_0^i + \sum_j e_j^i X^j \tag{2}$$

ここで $x^i$ は太陽系重心系、 $X^i$ は地心系の座標で、 $x_0^i$ は太陽系重心系における地心の位置、 $e_j^i$ は、tetrad  $e_j$ の成分である。

時間と空間座標を分けて具体的に書くと、

$$t = t_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{X} + O(c^3) \tag{3}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t_0) + \mathbf{X}(1-U) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{X}) + \Omega \mathbf{X} \tag{4}$$

ここで、 $t_0(\tau) = \tau + \int_0^\tau \left( \frac{v_0^2}{2} + U \right) dt$

となる。 $U$ は地球の重力ポテンシャル、 $x_0$ 、 $v_0$ はそれぞれ、地心の位置および速度ベクトル、 $\mathbf{X}$ は地心系の位置ベクトル、 $\Omega$ は反対称行列で2.4で述べた座標軸の回転を表す。時間座標 $t$ はTCBであり、 $\tau$ はTCG (地心における座標時) である。

空間座標の変換では、一般に測地線回転の部分を下で述べる歳差・章動に含めることで省いている。

### 3.2 地心系から地球固定系 (回転系)

次に、地心系から地球固定座標系への変換は、原点を共有しているの、空間部分と時間部分に分けるほうが都合がよい。エポック $t$ における地心系 [CRS] と地球固定系 [TRS] との変換式は、

$$[CRS] = Q(t)R(t)W(t)[TRS] \tag{5}$$

である。ここで、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 、 $W(t)$ は変換行列で、それぞれ、天の極位置の運動 (歳差・章動など)、地球の自転、極運動に由来するものである。

時間パラメータ $t$ としては、普通、ジオイド上の時計が示す固有時である「地球時」 $TT$ が用いられる。 $TT$ は、地心に置いた時計が示す固有時から地球重力場の影響を除いた時刻系から重力ポテンシャル分だけ遅れる時系である。 $TT$ とTCGの関係は以下のとおり。

$$\frac{dT_T}{dT_{CG}} = 1 - L_G$$

$$L_G = 6.969 \times 10^{-10} \tag{6}$$

また、地球上で稼働している原子時計の平均とも言えるTAI (国際原子時) は $TT$ を実現するもので、



$$TT = TAI + 32.184\text{sec} \quad (7)$$

の関係がある。

### 3.3 空間座標の変換

地球座標系どうしは、普通、空間部分の変換のみを考え、7パラメータまたは14パラメータの変換行列で相互の変換を行う。

座標系2から1への変換は、一般に次の式で表すことができる。

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}_{1,2} + \lambda_{1,2} \cdot \mathbf{R}_{1,2} \cdot \mathbf{X}_1 \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{X}$ は位置ベクトル、 $\mathbf{T}$ は原点移動のベクトル、 $\lambda_{1,2}$ はスケール変化、 $\mathbf{R}_{1,2}$ は回転行列である。

さらに、普通は $\mathbf{I}$ を単位行列、 $\lambda_{1,2}=1+D$ 、 $\mathbf{R}_{1,2}=\mathbf{I}+\mathbf{R}$ として線形化した式、

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{T} + D\mathbf{X}_1 + \mathbf{R}\mathbf{X}_1 \quad (9)$$

$$\text{ここで、 } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}$$

とその時間微分式が用いられる。

時系に関しては、一般的に世界時 (UTC) あるいは対象地域の標準時が使われるが、これらはTAIと(うるう秒+常数)の差であるので変換は容易である。

座標系の変換において考慮すべきプロセスを図-2に示した。

### 4. 測地系

2. で述べたように、地球全体を対象にする場合は地球重心に原点を取った座標系を用いることは当然であるが、近年の人工衛星測位技術の大きな発展・普及によって、各国の測地座標系も地心系に準拠して改訂される流れにある。その場合、位置は3次元直交座標で表されるが、我々は地球の表面に暮らしているので、従来からの地理座標(緯度、経度、高さ)による表示の体系は、非常に便利である。直交座標から、地理座標への変換は幾何学の公式に従って機械的に行われるが、高さに関しては注意が必要である。幾何学的に変換された高さは、楕円体高であり、いわゆる標高とはジオイドの高さだけ較差がある。

その1でも述べたように高さは水平面を基準にするのが实际的であり、従って重力ポテンシャルと密接な関係がある。さらに高さの変化は、地球の内部

のダイナミカルな変動を反映している。測量法でも、「高さ」は力学的な定義を採用している。宇宙測地技術は、原理的に高さ方向には精度が落ちるのでこのような分け方には意味があると同時に、地球は層構造をしているので、水平成分と高さ成分に分けることは、地球の構造やダイナミカルな性質を調べようとするときにも理にかなっている。

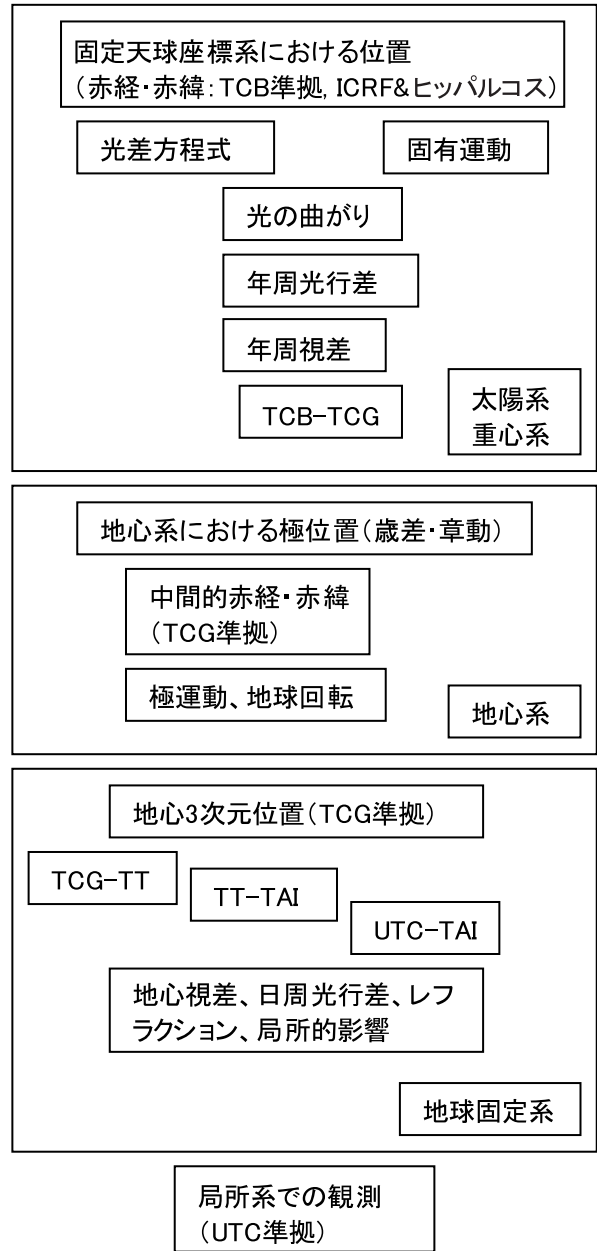


図-2 座標系の変換プロセス (IERS2003より)

#### 4.1 日本の測地基準系

日本の測地系は、日本測地系から世界測地系(ITRF系)に改訂された(2002年測量法改正・施行)。その構築の過程については、国土地理院(2003)に詳しく述べられている。

現行の測量法によれば、測量の位置の表し方において地心直交座標も使って良いとなっているが、あくまでも中心は経緯度（あるいは平面位置）と平均海面からの高さである。

また、日本は地殻変動が大きいことが知られておりすべての点は年間数cmのオーダーで動いている（図-3）。

基準点の座標をある元期で固定したということは、地球固定の座標系から見ると、日本の測地座標系が地球に対して動いていると考えることができる。剛体的運動なら国内の座標の整合性という観点では問題はないが、明らかに各点の相対位置も変化しているため、何年か後には相対精度の低下と最新の測量結果との矛盾を生じる。日本と同じような地殻変動帯に位置するニュージーランドでは既にセミダイナミックな座標系（地殻変動のモデルを導入し、その速度場を使って最新の測量結果を元期の値に戻すもの）が導入されている（以下のホームページを参照、<http://www.linz.govt.nz/rcs/linz/pub/web/root/home/index.jsp>）。国土地理院でも、次世代の測地座標の体系として（セミ）ダイナミックな座標系の導入も視野において議論が続けられている。

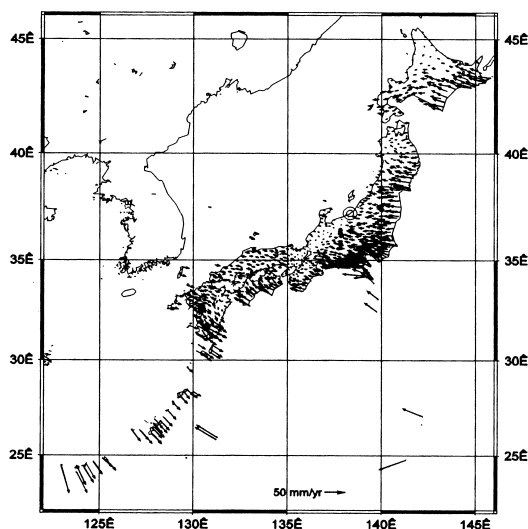


図-3 1996年3月～1999年12月のGEONETデータから求めた速度場。新潟付近の観測点を不動点と仮定。（Hatanaka et al., 2003）

#### 4.2 コロケーション

コロケーションとは同じ、あるいは近くの場所に置く（測る）という意味であり、様々な測地技術を駆使して測地基準系を構築している現在、非常に重要な考え方となっている。ITRFを成立させるためには、各技術の観測点の相互の関係が精密にわからなければ不可能である。いくつかの観測局では、複数技術による観測点が十分近くにあり、相互の位置関係を正確に求めることができるため、精密な測量によってお互いを結び付ける（ローカルタイ）。その情報によって、世界的に複数技術を調整して、世界測地系が形を成すのである。

また、お互いのデータを比較・統合することによって、信頼性の向上や機器のキャリブレーション、物理的シグナルの確認など、技術的・科学的に貢献することができる。

ここでは、国土地理院が行ったコロケーション測量から得られたVLBIとGPSの比較結果を示そう（図-4）。これは、つくば局と北海道の新十津川VLBI局において、VLBIアンテナと近くに設置されているGPSの参照点の相対位置を3次元的に正確に測量し、つくば-新十津川基線ベクトル（長さ約900km）上で二種類の観測結果を比較したものである。時系列は上から、基線ベクトルの長さ、東西成分、南北成分、高さ成分で、縦軸の1目盛りは2cm、横軸は時間で1998年4月から2003年7月の結果である。

これを見ると、長さ及び水平成分はお互いに1cm以内で整合しているが、高さについては数cmの系統的差異があるように見られる。宇宙技術においては、高さ成分の誤差が水平より一般的に大きいのが、ここで見られる差はそれ以上のものを示しており、今後検討を要する。

宇宙技術の精度は、観測局の増加と観測データの蓄積にともなう誤差解析技術の進歩によって、日々上がってきており、それに見合った精度の高いローカルタイの情報がますます必要になっている。

国際的にも、コロケーションの重要性は以前から認識されており、国際的な研究会の開催やIERSのワーキンググループの中で議論（例えば、CRL, 1999；[http://www.iers.org/workshop\\_2003\\_matera/](http://www.iers.org/workshop_2003_matera/)）が行われている。

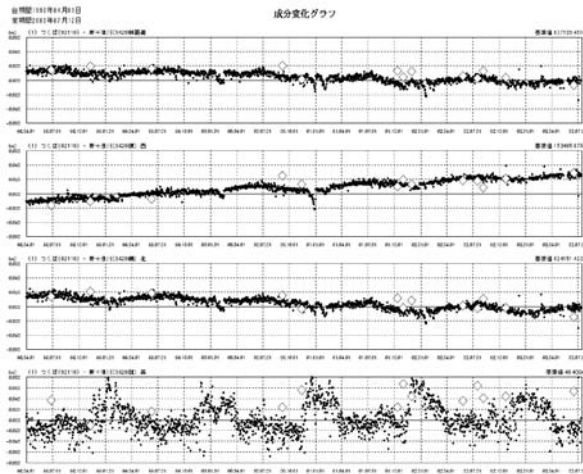


図-4 GPS時系列とVLBIの比較：  
●がGPS、◇がVLBI。(辻他，2003)

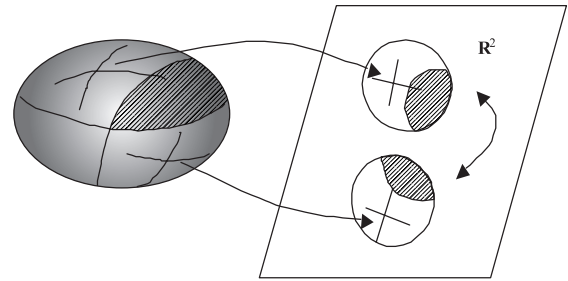


図-a1 多様体と局所座標系

例をあげると、 $n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ は、 $\mathbf{R}^n$ 全体を領域として、恒等写像を考えることにより多様体となり、 $(x^1, \dots, x^n)$ は、 $\mathbf{R}^n$ 全体の座標系となる。これを $\mathbf{R}^n$ の標準座標系という。

また、 $\mathbf{R}^3$ の中の2次元単位球面 $S^2$ 、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{a1}$$

は2次元の多様体で、 $z > 0$ の領域を表す局所座標系は、例えば、

$$(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rightarrow (x, y) \tag{a2}$$

となる。

多様体 $M$ 上の点 $p$ においては、接空間 $T_p$ が存在する。接空間は、直観的には $p$ において $M$ に接する平面であるが、数学的には次のように点 $p$ における接ベクトルを定義し、接ベクトルの全体を接(ベクトル)空間という。

接ベクトル $X$ とは、 $f, g$ を $p$ のまわりで定義された関数としたとき、以下の条件を満たす微分作用素である：

$$\begin{aligned} X(\alpha f + \beta g) &= \alpha X(f) + \beta X(g), (\alpha, \beta \in \mathbf{R}) \\ X(fg) &= fX(g) + X(f)g \end{aligned} \tag{a3}$$

$(x^1, \dots, x^n)$ を局所座標系として、 $p$ において

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), (i=1, \dots, n) \tag{a4}$$

とすると、 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は、関数 $f$ を $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ に移す写像であるから $p$ における接ベクトルと考えてよい。そして、

$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ が $T_p$ の基となる。接ベクトルは、方向微分であると言い換えてもよい(図-a2)。また、接空間の次元と多様体の次元は同じであることも簡単にわかる。

附 録

ここでは、数学的及び物理学的基礎概念を紹介する。さらに厳密及び詳細な情報については参考文献を見ていただきたい。

1. 1 基礎となる数学

空間を微分幾何学的に調べるには、多様体という概念を用いる。数学的に厳密な議論は、参考文献に譲ることとするが、多様体とは、ある(位相)空間で、その各部分領域と $n$ 次元ユークリッド空間との間に同型写像が存在するものをいう。空間内の点 $p$ は、その写像によって、 $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ と表せるから、その $n$ 個の数字の組を座標といい、写像と領域をあわせて座標系という。例えば、2次元曲面ならば2つの数字の組が必要である。注意しなければならないことは、一つの領域ですべての空間を覆うことができるとは限らないことである。そのため局所座標系と呼ばれる。さらに、重なり合った領域の座標は相互に変換可能(同型)でなければならない(図-a1)。

点 $p$ における接空間に内積  $g_p(u,v) \in \mathbf{R}$  が与えられているとしよう。内積とは正則な対称双一次形式のこと、つまり、以下のように二つの引数について線形な関数のことをいう。

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g(v,u), \\ g(au,v) &= ag(u,v), \quad a \in \mathbf{R} \\ g(u+v,w) &= g(u,w) + g(v,w) \end{aligned} \tag{a5}$$

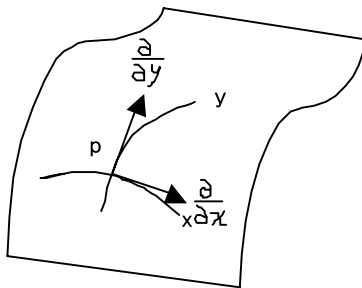


図-a2 接ベクトルと方向微分

さて、多様体上の各点 $p$ に接ベクトル $X_p$ を対応させるとき $M$ 上のベクトル場という。上と同じように局所座標系と接空間の基をとると、

$$X_p = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \tag{a6}$$

と表せる。ここで、 $\xi^i(p)$ は座標の関数であり、ベクトル $X$ の成分という。

また、

$$g_{ij}(p) = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{a7}$$

を $g$ の  $(x^1, \dots, x^n)$  に関する成分という。 $g_{ij}$ を行列で表すと対称行列になる。

$g(u,v)$ の値を成分で表せば、ベクトル $u, v$ の  $(x^1, \dots, x^n)$  に関する成分を  $(u^i), (v^j)$  としたとき、

$$g(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j \tag{a8}$$

となる。

ここで、点 $p$ におけるベクトル $v$ の長さを

$$\|v\|^2 = g_p(v,v) \tag{a9}$$

で定義する。長さは、空間に内積が導入されて初めて現れる概念である。そして、各点 $p$ の接空間に内積を定める  $(0,2)$  型テンソル場を計量 (metric) という。このとき、各点での計量テンソルの成分 $g_{ij}$ は座標の関数となる。

古典的には、計量を

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{a10}$$

という記号で表している。

例えば、おなじみのユークリッド空間とは、

$(g_{ij}) = (\text{n次の単位行列})$ 、あるいは、

$$ds^2 = \sum_i (dx^i)^2 \tag{a11}$$

で与えられた計量を持つ空間に他ならない。このとき、ベクトル $v$ の長さ (の2乗) は、もちろん

$$g(v,v) = \sum_i (v^i)^2 \tag{a12}$$

となる。

また、2次元の単位球面の計量は、 $(r, \theta)$  を座標にとると、

$$ds^2 = d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 \tag{a13}$$

となる。

計量には、その値が負にならない正值 (リーマン) 計量と負数も許される不定値 (擬リーマン) 計量があり、上の2例はリーマン計量、以下で取り扱う時空のローレンツ計量は後者である。

(接)ベクトルは、ある1点における接空間内で定義されたものなので、ベクトルに関する演算 (加法や実数倍、内積等) も接空間の中でのみ可能である。それでは、多様体上の異なる点でのベクトルはどのように関係しているのだろうか。ユークリッド空間ならば、一方のベクトルを平行移動して他方のベクトルと始点を重ねて比較でき、その結果は移動の道筋によらない。また、ベクトル場があったとき、ベクトルの微小移動による変化である微分も自然に定義される。しかし、一般の多様体にこの手続きをそのままあてはめることはできない。多様体全体に矛盾なく定義することができないからである。そのため、多様体に (線形) 接続という構造を与える。接続とは、ベクトルの“微分”を定義するもので、そのように定義された微分を共変微分という。また、接続によって平行移動の概念も明確化される。

接続が与えられた時、 $X, Y$ をベクトル場として、 $X$ の $Y$ 方向の共変微分を

$$\nabla_Y X \tag{a14}$$

と書く。座標系  $(x^1, \dots, x^n)$  に関して、

$$X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{a15})$$

とおくと,

$$\nabla_X Y = \sum \left( \xi^j \left( \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \sum \Gamma^i_{jk} \eta^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{a16})$$

となり, ユークリッド空間での方向微分に括弧内の第2項が付け加わった形となる。 $\Gamma^i_{jk}$ をクリストッフェルの記号という。

ベクトル  $\xi$  の曲線に沿った平行移動とは, 曲線の接ベクトルを  $u$  として,  $\nabla_u \xi = 0$  と定義され, 曲線の接ベクトルが平行移動される場合 ( $\nabla_u u = 0$ ), その曲線を測地線という。測地線の方程式は, 曲線の

パラメータ表示を  $x(t)$  とすると,  $u^i = \frac{dx^i}{dt}$  であるから以下のようになる:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{a17})$$

共変微分演算  $\nabla$  は, 任意のテンソル場に対して拡張でき, 二階の共変微分として曲率テンソルが定義される。接続は, 無限にたくさん存在するが,  $M$  にリーマン計量  $g$  が与えられているときには, 次の条件を満たす接続が一意に決まる。

$$\begin{aligned} \nabla g &= 0 \\ \nabla_X - \nabla_Y - [X, Y] &= 0, \quad ([X, Y] \equiv XY - YX) \end{aligned} \quad (\text{a18})$$

ここで, 第一式は, 計量テンソルが平行移動で変化しないこと, 第二式は振れ率が0という条件を示す。このような接続をリーマン接続というが, この場合, 共変微分や曲率テンソルは計量テンソルによって表現できる。つまり, 空間の性質は, 計量によって定まることになる(リーマン幾何学)。このとき, 曲線の長さは,  $u$  をその接ベクトルとして,

$$L = \int_A^B \sqrt{g(u, u)} \quad (\text{a19})$$

と定義され, 2点を結ぶ長さが最短になる場合(測地線の普通の定義)は, 上に述べた測地線の方程式を満たすことが示される。

## 1. 2 物理的時空

以上は数学の話であったが, 我々が住んでいる実際の世界は, どうなっているのだろうか。経験上, 我々が意識・感覚で捉えているこの宇宙は, 空間が3次元, 時間が1次元の4次元連続体であり, 時空(space-time)と呼ばれている。Einsteinの特殊相対性理論は, 空間と時間を不可分のものとして扱ったものだが, その後Minkowskiが4次元時空を導入し

数学的な基礎を与えた。それがMinkowski空間で, 次の計量を持つ(以下, 簡便のため光速  $c=1$  としている)。

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{a20})$$

ここで,

$$(\eta_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり,  $ds$  は微小時間間隔と解釈される。この時空では以前のガリレオやニュートンによって考えられていた時空とは違って, 時間間隔を線形に足すことはできない。

さて, 内積に関する定理により, ベクトル空間に次のような正規直交基  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  が存在する。

$$\begin{aligned} i \neq j \text{ ならば } g(e_i, e_j) &= 0 \\ 1 \leq j \leq p \text{ ならば } g(e_i, e_j) &= 1 \\ p+1 \leq j \leq n \text{ ならば } g(e_i, e_j) &= -1 \end{aligned} \quad (\text{a21})$$

ここで,  $p \geq 0$  は一意に定まる。

つまり, 各ベクトルが直交して正值のものが  $p$  個, 負値のものが  $n-p$  個あるということである。ローレンツ内積では,  $p=1$  となる。多様体上の各点にローレンツ内積を与える計量をローレンツ計量という。

ベクトル  $v$  は, その内積が正, 負, 0 に従ってそれぞれ, 空間的, 時間的, null (ヌル, 零的) という(図-a3)。時間的ベクトルは光速より小さい速度, nullベクトルは光速を表す。nullベクトルの全体を, 光(円)錐という。

物理的に可能な運動は, 時間的あるいはnullのベクトルで, 時空内の軌跡を世界線と呼ぶ。 $ds$  を世界線に沿って積分したもの

$$\tau = \int_A^B ds \quad (\text{a22})$$

を固有時といい, 物体とともに動く時計で測られる時間間隔である。固有時に対し, 座標  $t$  を座標時という。



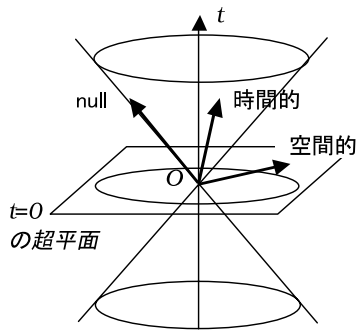


図-a3 3種類のベクトルと光錐

力学の基本的な概念に慣性系がある。慣性系とは、物体が力を受けない限り等速直線運動をするような座標系で、ニュートン力学ではガリレオ変換、特殊相対論ではローレンツ変換が成り立つ力学系である。

特殊相対論、また、ローレンツ変換は、いくつもの実験によって非常に正確にその正しさが検証されている。特殊相対論は、平坦な空間の幾何学であるが、その後重力を空間の性質に由来するものとして捉えた一般相対論が展開された。これは、曲がった空間の幾何学である。一般相対論を要約すると次のようになる。

重力場の重要な性質は、その中で物体が受ける加速度は物体の質量によらないということである。一方、慣性系でない座標系で見ると、物体には慣性力が働く。この力も質量にはよらない。二つの力が等価であるとみなしたところ（等価原理）から特殊相対論の一般化として一般相対論が構築されたのである（図-a4）。

図-a4では、系の加速度によって重力と同じ力が物体に働くことを示しているが、逆に、重力場の中を自由落下する系では力は0となる。ただし、一般には重力と慣性力は、局所的（1点）でしか等価にできない。球対称な地球の重力を慣性力で打ち消すことができないことは明らかであろう。

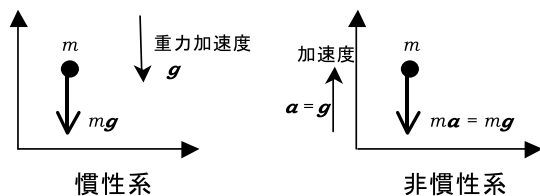


図-a4 等価原理

空間内の2点を結ぶ長さ最小の曲線が測地線だが、時空内で物体に力が働かない時にはその物体は測地線上を動く。重力がない場合は、直線となる。重力だけがあり、その他の力が働いていない場合は、等価原理により測地線上を動くことが期待される。つまり、自由落下運動は測地線を描くことになる。ただし、一様な重力場は等価原理によって消去できるから、測地線の振る舞いは、重力の非一様性つまり潮汐力の反映であり、これが、リーマン幾何学により時空の曲がり具合つまり曲率と関係づけられる。そして時空の曲率と物質密度との関係式を導き出したのがEinsteinの一般相対論である。

ここで曲がった時空内での物理現象がどうなるか簡単な例で見てみよう。

重力がない場合は、平らな空間のローレンツ計量(a20)が成り立つが、重力が弱く、従って物体の速度vが光速より十分小さいとすると（ニュートン近似）、Uを重力ポテンシャルとして計量テンソルが次のように得られる。

$$ds^2 = (1 - 2U)dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (a23)$$

これから、

$$\frac{ds}{dt} = 1 - \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \quad (a24)$$

を得る。この式は、重力場にある時計は重力場がない時に比べ遅れること、運動している時計も運動していない場合に比べ遅れることを示している。

数学的な概念である多様体には正定値のリーマン計量は一般に存在するが、ローレンツ計量が存在するとは限らない。が、我々の住んでいるこの時空にはローレンツ計量が存在する。それは、正確な時計によって刻まれる時間が局所的に特殊相対論に則って振る舞い、場所や時刻に拠らないことからわかる。つまり、式(a20)の形のdsをどこでも（局所的に）定義できるということである。長さの単位はメートルであり、現在では光速一定の原理から光がある時間間隔に進む距離として定義されている。時間間隔は、これも物理学の基本原則である量子力学を拠り所としてセシウム原子から放射されるマイクロ波の周期の整数倍として1秒が定義される。このことは、時空の幾何学的な性質が物質のミクロな性質と基本的に深くかかわっていることを示すものである。

## 参 考 文 献

- Communications Research Laboratory (1999): Proceedings of the International Workshop on Geodetic Measurements by the collocation of Space Techniques on Earth, Jan. 25-28, 1999, Koganei, Tokyo, Japan.
- Hatanaka, Y., T. Iizuka, M. Sawada, A. Yamagiwa, Y. Kikuta, J. M. Johnson, C. Rocken (2003): Improvement of the Analysis Strategy of GEONET, Bulletin of the Geographical Survey Institute, 49, 1-35.
- 国土地理院 (2003): 測地成果2000構築概要, 国土地理院技術資料B-5 No.20
- 松島与三 (1979): 多様体入門, 数学選書5, 裳華房
- McCarthy, D. (ed) (1996): IERS Conventions (1996), IERS Technical Note 21, Observatoire de Paris, Paris.
- McCarthy, D. and G. Petit (2003): IERS Conventions (2003), IERS Technical Note 32, Observatoire de Paris, Paris.
- 日本測地学会 (1994): 現代測地学
- 野水克巳 (1981): 現代微分幾何入門, 基礎数学選書25, 裳華房
- Penrose, R. (1968): Structure of Space-Time, in Battelle Rencontres, 1967 Lectures in Mathematics and Physics, eds C. M. Dewitt and J. A. Wheeler, Benjamin, New York.
- Shahid-Saless, B. and R. Hellings (1991): A Picosecond Accuracy Relativistic VLBI Model via Fermi Normal Coordinates, Geophys. Res. Lett., 18, No.6, 1139-1142.
- 辻宏道, 高島和宏, 河和宏, 栗原忍, 畑中雄樹, 松坂茂 (2003): 高精度コロケーション測量結果に基づくGPSとVLBI時系列の比較, 日本測地学会100回講演会要旨, 日本測地学会